

и так далее до бесконечности. Именно на этом пути греческие математики впервые открыли существование несоизмеримых отрезков.

Так как отношение диагонали квадрата к стороне равно $\sqrt{2}$, то приведенное геометрическое доказательство несоизмеримости диагонали и стороны квадрата вместе с тем является и доказательством иррациональности числа $\sqrt{2}$. В силу сказанного выше $\sqrt{2}$ разлагается в бесконечную непрерывную дробь следующего вида:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

5. О РЕШЕНИИ ДЕСЯТОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА *)

В «Кванте» № 3 за 1970 год сообщалось о выдающемся успехе ленинградского математика Ю. В. Матиясевича, которому удалось сделать завершающий шаг в решении одной из знаменитых «проблем Гильберта», поставленных еще в 1900 году. Работа Ю. В. Матиясевича опубликована в Докладах Академии наук СССР **). И что бывает редко — вдумчивый школьник может самостоятельно разобраться в основном содержании этой работы, имеющей важное значение для современной математической науки. Дело в том, что оригинальная часть работы Ю. В. Матиясевича посвящена доказательству теоремы, формулировка которой вполне элементарна и приведена в публикуемой нами статье. Методы доказательства тоже элементарны. Труднее, правда, объяснить на понятном школьнику языке, почему эта теорема о числах Фибоначчи имеет столь значительный интерес для серьезной математической науки. По своей формулировке и методам доказательства она скорее напоминает хитрую олимпиадную задачу.

5.1. Теорема о числах Фибоначчи

Во всем дальнейшем мы будем иметь дело только с целыми числами. Рассмотрим такое свойство пары чисел (a, b) :

«b делится на a».

*) Статья написана в соавторстве с Ф. Л. Варнаховским.

***) Вот название и точный «адрес» статьи: Матиясевиц Ю. В.

Это свойство пары чисел можно выразить и так:

«существует число x такое, что $ax - b = 0$ ».

Мы выразили наше свойство пары чисел (a, b) через существование решения уравнения

$$ax - b = 0$$

(напомним еще раз, что мы имеем дело только с целыми числами и, значит, только с целыми решениями). Уравнение это имеет вид

$$P(a, b, x) = 0,$$

где P — многочлен от трех переменных a, b, x .

Введем теперь общее определение: *свойство конечной последовательности чисел (a_1, a_2, \dots, a_m) называется диофантовым, если существует такой многочлен от $m + n$ переменных*

$$P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

что последовательность (a_1, a_2, \dots, a_m) обладает нашим свойством в том и только в том случае, когда существуют числа x_1, x_2, \dots, x_n , для которых

$$P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Основное достижение Матиясевица как раз и состоит в доказательстве диофантовости некоторого специального свойства пар чисел (a, b) .

Многие из вас знакомы с числами Фибоначчи

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0, & \psi_1 &= 1, \\ \psi_2 &= \psi_0 + \psi_1 = 1, \\ \psi_3 &= \psi_1 + \psi_2 = 2, \\ \psi_4 &= \psi_2 + \psi_3 = 3, \\ \psi_5 &= \psi_3 + \psi_4 = 5, \\ &\dots & &\dots\end{aligned}$$

бесконечная последовательность которых определяется рекуррентной формулой

$$\psi_{n+1} = \psi_{n-1} + \psi_n.$$

Свойство пары чисел (a, b) , которым занимается Матиясевиц, таково:

« b есть число Фибоначчи с номером $2a$ », т. е. $b = \psi_{2a}$. Ясно, что этим свойством обладают пары

$$(0, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 8)$$

и т. д. Утверждение, что свойство Матиясевича диофантово, означает, что существует многочлен

$$Q(a, b, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

такой, что b будет числом Фибоначчи с номером $2a$ тогда и только тогда, когда существуют такие числа x_1, \dots, x_n , что

$$Q(a, b, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Многочлен Q с целыми коэффициентами можно было бы в принципе явно выписать. Матиясевич этого не делает и даже не указывает, каково число n дополнительных переменных.

Что касается доказательства сформулированной теоремы, то, как уже было сказано, оно вполне элементарно. Матиясевич ссылается на одну лемму, доказанную в книжке Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи», предназначенной для школьников, и один результат, доказанный в более ученой книге А. И. Мальцева, но тоже элементарный. В самой работе Матиясевича девятнадцать лемм приведены без доказательства, но доказательство каждой из них в отдельности не труднее обычных задач для школьников. Трудность состояла в том, чтобы найти ту именно комбинацию элементарных предложений, которая ведет к конечной цели.

5.2. Почему все это так важно?

Если бы многочлен Q Матиясевича был в самом деле очень нужен математикам для проведения каких-либо расчетов, то вероятно, Матиясевич не поленился бы его явно выписать. Но в действительности само обращение к числам Фибоначчи являлось для Матиясевича лишь вспомогательным средством для установления весьма общих и важных закономерностей.

В случае свойства Матиясевича существует очень простой регулярный способ (алгоритм) для последовательного выписывания всех обладающих этим свойством пар

$$(0, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 8), (4, 21), (5, 55), \dots$$

Так как множество этих пар бесконечно, то процесс их выписывания никогда не кончится. Но мы располагаем правилом, по которому наши пары можно выписывать одну за другой с уверенностью в том, что:

1) будут выписаны только пары, обладающие свойством Матиясеви́ча;

2) любая пара, обладающая свойством Матиясеви́ча, рано или поздно будет выписана.

Введем еще одно определение: свойство (на более ученом языке «предикат») конечной последовательности чисел (a_1, a_2, \dots, a_m) называется *перечислимым*, если существует правило, позволяющее при помощи механического применения этого правила получать одну за другой последовательности, с неперенностью обладающие заданным свойством, и притом так, что любая последовательность, обладающая этим свойством, рано или поздно будет получена.

С современной точки зрения самым значительным следствием теоремы Матиясеви́ча о числах Фибоначчи является

Теорема 1. Любое перечислимое свойство конечной последовательности чисел является диофантовым.

До 1961 года эта теорема казалась бы крайне неожиданной. Но некоторый более слабый результат Деви́са, Пу́тнама и Ро́бинсон, доказанный в 1962 году, сделал такую гипотезу уже не столь невероятной. На ее доказательство математиками были затрачены немалые усилия. Матиясеви́ч и воспользовался некоторыми, как говорят, «редукциями» проблемы к более специальным задачам. Но идея свести все к свойствам чисел Фибоначчи была и в обстановке, сложившейся к 1970 году, неожиданной.

Таким образом, крупный успех Матиясеви́ча требовал соединения понимания больших проблем современной математики и эрудиции в своей области с искусством находить неожиданные вполне элементарные пути решения специальных задач.

5.3. В каком смысле Матиясеви́ч решил десятую проблему Гильберта

В десятой проблеме Гильберта *) речь идет об уравнениях вида

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

где P — многочлен с целыми коэффициентами. Степенью такого уравнения называют степень многочлена

*) Более подробно о проблемах Гильберта можно прочитать в книге Д. Гильберта «Математические проблемы» (Наука, 1969).

P. Когда вопрос ставится о нахождении их решений в целых числах, эти уравнения называются «диофантовыми». Например, уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

имеет четыре решения в целых числах:

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1,$$

а уравнение

$$x^2 + y^2 = 3$$

в целых числах решений не имеет.

Теперь предоставим слово самому Гильберту:

«Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных...; требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечном числе шагов узнать, имеет данное уравнение решение в целых числах... или нет».

Гильберт, по-видимому, был убежден, что искомый общий метод существует, и дело заключалось лишь в том, чтобы найти его. Немало усилий было затрачено, чтобы отыскать этот метод, но сколь-нибудь обнадеживающих результатов не получалось.

Задача о целых решениях произвольного уравнения легко сводится к задаче о натуральных (целых неотрицательных) решениях. Далее, совсем нетрудно показать, что достаточно ограничиться диофантовыми уравнениями степени не выше четвертой. Для диофантовых уравнений степени не выше второй искомый общий метод был найден, но уже уравнения третьей степени не поддавались никаким усилиям.

В связи с неудачами в этом направлении возникло подозрение, что этот общий метод, об отыскании которого говорится в формулировке Гильберта, попросту не существует! Сходная ситуация сложилась и в ряде других задач аналогичного характера. Однако одно дело найти требуемый общий метод — тут достаточно было только предъявить этот метод и непосредственно убедиться в том, что он удовлетворяет условиям, выдвинутым Гильбертом. А вот чтобы доказать несуществование некоего общего метода для решения серии задач, требовалось дать точное определение тому, что такое этот общий метод, как и какими средствами он может быть реализован.

В начале тридцатых годов соответствующие определения были выработаны в трудах американского ученого Чёрча и английского ученого Тьюринга. Эти определе-

ния положили начало теории алгоритмов. Оглядываясь на пройденный путь, математики должны быть благодарны десятой проблеме Гильберта уже за то, что она послужила одним из стимулов для создания этой теории.

В рамках теории алгоритмов было получено и точное определение понятия «перечислимое свойство», которым мы воспользовались в предыдущем пункте.

Оказалось, что из диофантовости любого перечислимого свойства конечной числовой последовательности вытекает

Т е о р е м а 2. *Невозможен общий метод (алгоритм), позволяющий для любого заданного диофантова уравнения установить, имеет оно решения в целых числах или нет.*

Матияевич из своей теоремы о диофантовости специального свойства пары чисел (a, b)

$$b = \psi_{2a}$$

вывел доказательство теоремы 1, из которой, как уже было известно, вытекает теорема 2, т. е. отрицательное решение десятой проблемы Гильберта.

Для окончательного понимания всего сказанного вам не хватает только отчетливого знания того, что такое «алгоритм» (общий метод решения бесконечного ряда задач) и что такое «перечислимое свойство» (перечислимый предикат). Но это уже значительно более трудная тема

5.4. Определения и факты теории алгоритмов

1. Среди функций, определенных на множестве \mathbb{N} натуральных чисел и принимающих натуральные значения, следующим образом выделяется класс *примитивно рекурсивных функций*.

Рассматриваются функции $S(n) = n + 1$ и $q(n) = n - p$, где $p^2 \leq n < (p + 1)^2$. Из произвольных функций $f(n)$ и $g(n)$ разрешается образовывать функции $h_1(n) = f(n) + g(n)$ (операция сложения), $h_2(n) = f(g(n))$ (операция подстановки), а из одной функции $f(n)$ — функцию, определяемую равенствами $h_3(0) = 0$, $h_3(n + 1) = f(h_3(n))$ (операция итерирования). Класс примитивно рекурсивных функций состоит из функций S , q и всех тех функций, которые могут быть получены из них конечным числом сложений, подстановок и итерирований.

Пример. Покажем, что функции $\varphi(n) = 2n$ и $\psi(n) = 2n + 1$ примитивно рекурсивны. Применим сначала операцию итерирования к функции $S(n) = n + 1$. Тогда $h(0) = 0$, $h(n+1) = S(h(n)) = h(n) + 1$. Следовательно, $h(n) = n$ и $\varphi(n)$ получается применением операции сложения к двум функциям, каждая из которых равна $h(n)$: $\varphi(n) = h(n) + h(n) = n + n = 2n$. Наконец, функция $\psi(n)$ получается операцией подстановки, примененной к функциям $S(n) = n + 1$ и $\varphi(n) = 2n$:

$$\psi(n) = S(\varphi(n)) = S(2n) = 2n + 1.$$

2. Множество M натуральных чисел называется *перечислимым*, если оно совпадает со множеством значений некоторой примитивно рекурсивной функции.

Так, например, множество четных чисел *перечислимо*, так как является множеством значений примитивно рекурсивной функции $\varphi(n) = 2n$. Множество нечетных чисел, совпадающее со множеством значений примитивно рекурсивной функции $\psi(n) = 2n + 1$, также *перечислимо*.

3. Множество M называется *разрешимым*, если оно *перечислимо* вместе со своим дополнением $\mathbb{N} \setminus M$ (где \mathbb{N} — множество всех натуральных чисел).

В частности, разрешимо множество четных чисел, поскольку оно *перечислимо* вместе со своим дополнением (множеством нечетных чисел).

4. *Существуют перечислимые, но неразрешимые множества.*

Можно привести конкретный пример такого множества, однако соответствующая конструкция технически слишком сложна, для того чтобы ее можно было выполнить в рамках настоящей заметки.

Пусть теперь дано некоторое множество M натуральных чисел. Можно задаться вопросом, существует ли общий метод, который по каждому натуральному n определяет за конечное число шагов, принадлежит это n множеству M или нет. Основное положение теории алгоритмов (*тезис Чёрча*) утверждает, что *такой метод (алгоритм) существует тогда и только тогда, когда множество разрешимо.*

Для отрицательного решения десятой проблемы Гильберта достаточно было доказать *диофантовость каждого перечислимого множества*, т. е. по каждому перечислимому множеству M уметь строить такое диофантово уравнение $P(y, x_1, \dots, x_k) = 0_x$, которое имело бы натураль-

ные решения x_1, \dots, x_k для всех y , принадлежащих M , и только для таких y .

В самом деле, если бы это можно было сделать, то взяв в качестве M неразрешимое множество (такие есть среди перечислимых, см. п. 4), мы получили бы, что уже для соответствующего уравнения $P(y, x_1, \dots, x_k) = 0$ нет общего метода (алгоритма), который по каждому натуральному y давал бы ответ на вопрос о существовании у этого уравнения натуральных решений. Ведь если бы этот метод имелся, то можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли уравнение $P(0, x_1, \dots, x_k) = 0$ решение (т. е. принадлежит ли число 0 множеству M), имеет ли уравнение $P(1, x_1, \dots, x_k) = 0$ решение (т. е. принадлежит ли число 1 множеству M) и т. д. Получилось бы, что существует общий метод, который по каждому натуральному y определяет за конечное число шагов, принадлежит это y множеству M или нет. Тогда в силу тезиса Чёрча M было бы разрешимо вопреки выбору этого множества.

5.5. Что было сделано и что сделал Матиясевич

В пятидесятые годы группа американских математиков (Р. Робинсон, Х. Путнам, М. Дэвис, Дж. Робинсон) получила ряд значительных и обнадеживающих результатов в поисках доказательства диофантовости перечислимых множеств. (Гипотезу о диофантовости перечислимых множеств выдвинул Мартин Дэвис.)

Американским ученым ценою значительных усилий удалось свести задачу к доказательству диофантовости отношения $y = z^n$. Джулия Робинсон пошла даже несколько дальше, показав, что достаточно построить конкретное уравнение $R(u, v, x_1, \dots, x_k) = 0$, не допускающее решения с $v > u^n$, но для каждого n имеющее решение с $v > u^n$. Именно такого рода уравнение и удалось построить Ю. В. Матиясевичу, предложившему вполне элементарную, но чрезвычайно остроумную и оригинальную конструкцию. При этом пришлось решать задачу, необычную для традиционной теории чисел. Ведь в теории чисел по заданному уравнению, как правило, исследуются свойства его решений, здесь же, наоборот, задавшись определенными свойствами решений, нужно было искать требуемое уравнение.

Обратившись к рассмотрению последовательности Фибоначчи, Матиясевиц заметил, что если за u взять половину номера четного члена последовательности, а за v — сам член, то неравенство $v > u^u$ будет всегда неверно, а для любого n можно найти такой четный член последовательности, что неравенство $v > u^n$ будет верно. Это обстоятельство иллюстрируется таблицей, приведенной ниже. (В ней выделены те клетки, в которых числа u^k оказываются меньше соответствующих чисел v .)

После того как указанное свойство было проверено, Матиясевиц «подправил» последовательность Фибоначчи, выбросив из нее нечетные члены. Именно, он рассмотрел

Номер члена последовательности	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Член последовательности v	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	
Половина номера четного члена последовательности u	0		1		2		3		4		5		6	
u^u	1	1		4		27		64		3125		47	256	
u^0	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
u^1	0	1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u^2	0	1		4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
u^3	0	1		8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728

последовательность, задаваемую соотношениями: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_{n+1} = 3\varphi_n - \varphi_{n-1}$. Получилась в точности последовательность из четырех членов первоначальной последовательности: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 3$, $\varphi_3 = 8$, $\varphi_4 = 21$, $\varphi_5 = 55$, $\varphi_6 = 144$, $\varphi_7 = 377$ и т. д. Приняв теперь за u номер члена последовательности, а за v — член последовательности с номером u , т. е. φ_u , мы получаем, что снова выполняется требуемое свойство для u и v . Теперь оставалось построить уравнение $P(u, v, x_1, \dots, x_k) = 0$, которое имело бы натуральное решение тогда и только тогда, когда $v = \varphi_u$ — дальше можно было бы сослаться на результат Джудии Робинсон! Для этого достаточно было бы построить систему диофантовых уравнений $P_1 = 0, \dots, P_n = 0$ в переменных u, v, x_1, \dots, x_k , имеющую решение тогда и

только тогда, когда $v = \varphi_u$, — ведь такая система имеет в точности те же решения, что и единственное уравнение $P_1^2 + \dots + P_n^2 = 0$. Вот в каком виде получил Матиясевич требуемую систему уравнений:

- 1) $u + (a - 1) = v$,
- 2) $v + b = l$,
- 3) $l^2 - lk - k^2 = 1$,
- 4) $g^2 - gh - h^2 = 1$,
- 5) $l^2c = g$,
- 6) $ld = r - 2$,
- 7) $(2h + g)e = r - 3$,
- 8) $x^2 - rxy + y^2 = 1$,
- 9) $lp = x - u$,
- 10) $(2h + g)q = x - v$.

Для доказательства того, что существование натурального решения этой системы равносильно соотношению $v = \varphi_u$, Матиясевич использовал следующее характеристическое свойство последовательности $\{\varphi_k\}$:

пара условий $x < y$ и $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ равносильна существованию такого k , что $x = \varphi_k$ и $y = \varphi_{k+1}$.

Интересующемуся читателю рекомендуем попробовать свои силы на доказательстве этой равносильности.

Укажем в заключение, что найденное решение десятой проблемы имеет ряд интересных следствий, из которых, может быть, наиболее эффективным является следующее: *можно указать конкретный многочлен пятой степени, множество положительных значений которого совпадает со множеством всех простых чисел!*

Математическая наука записала в свой актив серьезное и поучительное достижение.

З а д а ч и.

1. Покажите, что для любого k числа φ_k и φ_{k+1} взаимно просты.
2. Докажите соотношение: $\varphi_{k+1} = \varphi_{k+1}\varphi_l - \varphi_k\varphi_{l-1}$.
3. Покажите, что диофантово уравнение $P(y, x_1, \dots, x_k) = 0$ имеет решение в целых положительных числах тогда и только тогда, когда такое решение имеет уравнение

$$Z = (1 - P(z, x_1, \dots, x_k)^2) - y.$$

6. К ОБОСНОВАНИЮ ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Обычно при построении теории вещественных чисел предполагают уже построенной теорию рациональных чисел. Возможно поступать иначе и вводить вещественные числа непосредственно вслед за