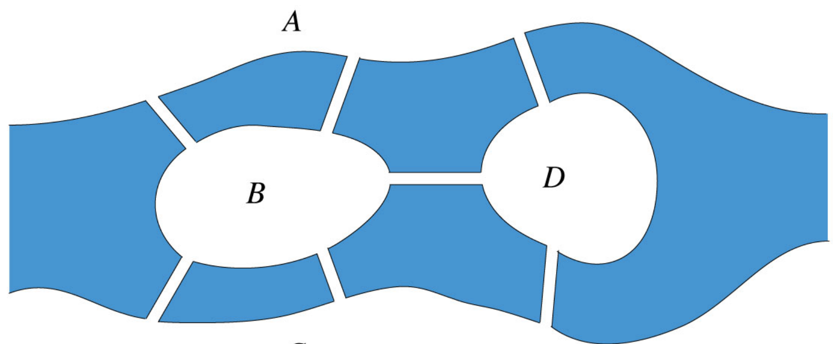
7 გრაფთა თეორიის ელემენტები

7.1 გრაფების განსაზღვრება

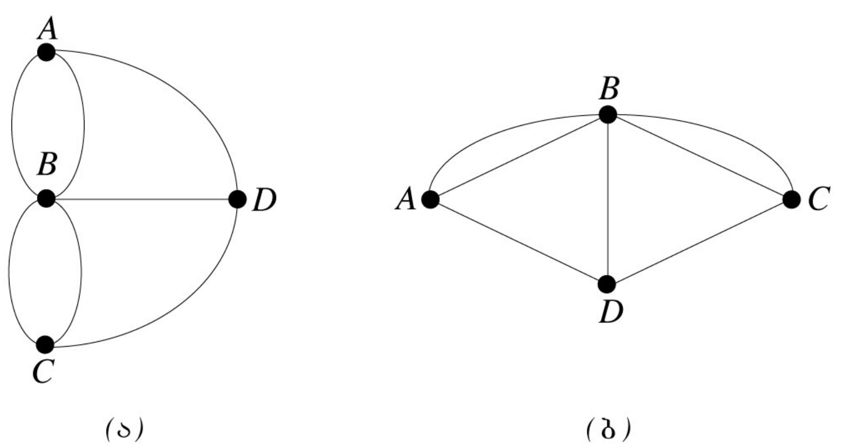
ყველა დროის ერთ-ერთმა უდიდესმა მათემატიკოსმა ლეონარდ ეილერმა, რომელიც ერთი ხანი ქალაქ კიონიგსბერგში (ახლანდელ კალინინგრადში) ცხოვრობდა, შემდეგი ამოცანა დასვა:

ეილერის ამოცანა ხიდების შესახებ: ქალაქში მოედინება მდინარე, რომელიც მას ორ ნაწილად ჰყოფს. ამას გარდა, თვითონ მდინარეში ორი კუნძულია (ნახ. 34). ხმელეთის ნაწილები, რომლებიც ნახაზზე ლათინური ასოებითაა აღნიშნული, ერთმანეთთან შეერთებულია ხიდებით. შეიძლება თუ არა ქალაქს შემოვუაროთ ისე, რომ ყველა ხიდზე გადავიდეთ ***ერთხელ და მხოლოდ ერთხელ***?



ნახ. 34: კიონიგსბერგის მდინარე და ხიდები

აღსანიშნავია, რომ მოცემული სურათის საჩვენებლად ხატვა სულაც არაა საჭირო: საკმარისია ხმელეთის ნაწილები აღვნიშნოთ წერტილებით, ხოლო მათი შემაერთებელი ხიდები კი ხაზებით (ნახ. 35).

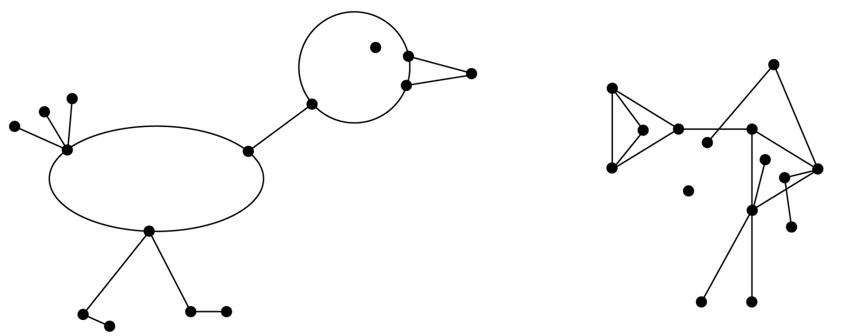


ნახ. 35: კიონიგსბერგის ხიდების ამოცანის გრაფები

ასეთ სტრუქტურას - წერტილებს და მათ შემაერთებელ ხაზებს - *გრაფი* ეწოდება. ზემოთ მოყვანილი ორივე ნახაზი (ა) და (ბ) ერთსა და იმავე გრაფს აღწერს, იმის და მიუხედავად, რომ ერთი შეხედვით ნახაზები სხვადასხვაა: გრაფში მთავარია იმის შესახებ ინფორმაციის მიღება, თუ რომელი წერტილი რომელ სხვა წერტილებთანაა შეერთებული.
გრაფის წერტილებს მისი *კვანძები* ეწოდება, ხოლო ხაზებს კი - წიბოები.
ფორმალურად გრაფი შემდეგნაირადაც შეგვიძლია აღვწეროთ:

მოცემულია წვეროთა სიმრავლე $V = \{A, B, C, D\}$ და წიბოები $E = \{(A, B), (B, A), (A, D), (B, C), (C, B), (B, D), (C, D)\}$.
აქედან გამომდინარე, გრაფის ნახაზის დახაზვა სულაც არაა აუცილებელი: იგი წვეროთა და წიბოთა სიმრავლეებითაც შეიძლება სრულფასოვნად აღიწეროს. მთავარია იმის ცოდნა, თუ რა წვეროებია მოცემული და რომელი წვეროებია წიბოებით შეერთებული.
ასე რომ, გრაფი G შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც ორი სიმრავლისაგან შემდგარი სტრუქტურა: $G = (V, E)$.

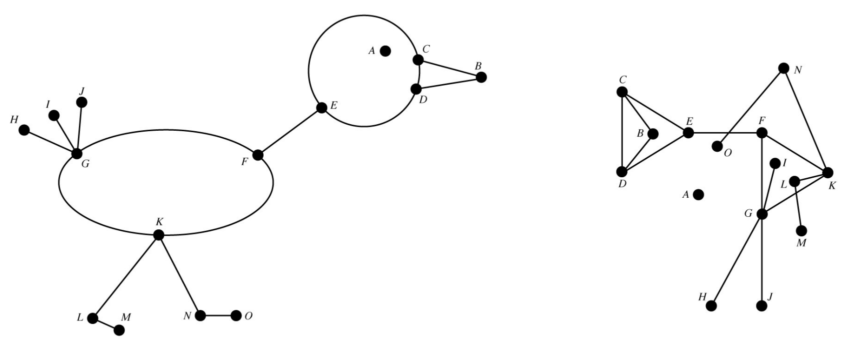
მაგალითისათვის მოვიყვანოთ გრაფი, რომელიც ნაჩვენებია ქვედა ნახაზში.



(ა) *(ბ)*

ნახ. 36: ერთი და იგივე გრაფის სხვადასხვა გრაფიკული წარმოდგენა

ადვილი დასანახი არაა, რომ (ა) და (ბ) ნახაზებში ერთი და იგივე გრაფია ნაჩვენები. მაგრამ თუ წვეროებს სახელებს დავარქმევთ და გადავამოწმებთ, თუ რომელი წვეროა რომელთან შეერთებული, მათ ექვივალენტურობას (ტოლობას) წვეროებისა და წიბოების სიმრავლეების ტოლობით დავამტკიცებთ.



(ა) *(ბ)*

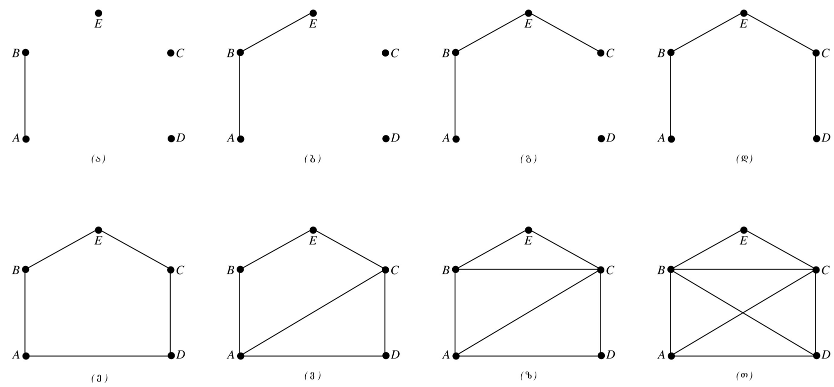
ნახ. 37: ერთი და იგივე გრაფის სხვადასხვა გრაფიკული წარმოდგენა

სავარჯიშო 7.1: აღწერეთ 37 (ა) და 37 (ბ) ნახაზებში მოყვანილი გრაფების წვეროებისა და წიბოების სიმრავლეები და დაამტკიცეთ მათი ტოლობა.

ზემოთ მოყვანილ გრაფებში არსებობს ე.წ. *იზოლირებული* წვერო - ანუ ისეთი, რომელიც სხვა წვეროებთან არაა დაკავშირებული. შეიძლება არსებობდეს ისეთი გრაფებიც, რომლებიც ორი ნაწილისგან (გრაფისგან) შედგება. ასეთ გრაფებს *არა* ბმული ეწოდებათ. ჩვენ ძირითადად ბმულ გრაფებს განვიხილავთ, ანუ ისეთებს, სადაც *ნებისმიერ* ორ წვეროს შორის შემაერთებელი გზა არსებობს.

როგორც ვნახეთ, ერთი და იგივე გრაფი შეიძლება სხვადასხვანაირად დავხაზოთ. ზოგადად, გრაფის დახაზვას მნიშვნელობა არ აქვს. მთავარია გვქონდეს ინფორმაცია იმის შესახებ, თუ რომელი წვერო რომელთანაა შეერთებული.

ნახ. 38-ში ნაჩვენებია, თუ როგორ შეიძლება დაიხაზოს გრაფი ისე, რომ ერთ წიბოზე ორჯერ არ გადავიაროთ.



ნახ. 38: გრაფის დახატვის ეტაპები

სიტყვიერად ეს შემდეგნაირად შეიძლება გამოვთქვათ: „A წვეროდან ხაზი გაავლე B წვეროში, იქიდან E-ში, შემდეგ C-ში, D-ში, ისევ A-ში, შემდეგ C-ში, B-ში და ბოლოს ისევ D-ში".
უფრო ფორმალურად ეს შემდეგი სიტყვით შეიძლება გამოვსახოთ:

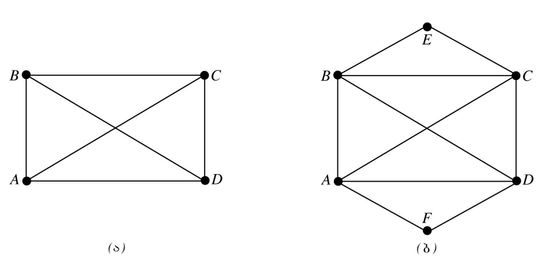
$$ABECDACBD.$$

გრაფის დახაზვის პროცესი შეიძლება შევადაროთ გრაფზე „სიარულს": ერთი წვეროდან მეორეში წიბოს გავლება ამ წვეროდან მეორეში „გადასვლის" ტოლფასია.

თუ ასეთი წესით ერთი წვეროდან მეორეში გადავალთ (ისე, რომ ერთსა და იმავე წიბოზე ორჯერ არ გადავივლით), განვლილი წიბოების ერთობლიობას „გზას" ვუწოდებთ. ასე, მაგალითად, 38 (დ) -ში განვლილი გზა იქნება $ABECD$. იმ წიბოებს, რომლებზედაც გზის გავლისას გადავივლით, ამ გზით *დაფარული* წიბოები ეწოდება.

ამრიგად, ეილერის ამოცანაც შეიძლება ასე დავსვათ: მოცემულ გრაფში არსებობს თუ არა ისეთი გზა, რომელიც ყველა წიბოს (მხოლოდ ერთხელ) დაფარავს? თუ ასეთი გზა არსებობს, მას ეილერის ციკლს უწოდებენ.
ზემოთ მოყვანილი ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასეთნაირადაც: არსებობს თუ არა მოცემულ გრაფში ეილერის ციკლი?

თუ განვიხილავთ ორ გრაფს, რომელიც ნაჩვენებია 39 ნახაზში, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $ABECDACBDFA$ გზა სწორედ ნახ. 39(ბ) გრაფს ზემოთ აღწერილი პირობებით გადაფარავს, მაგრამ ნახ. 39(ა) გრაფისათვის ასეთი გზის პოვნა ძნელია.
ბევრი ცდის შემდეგ გაჩნდება ეჭვი, რომ ასეთი გზა საერთოდ არ არსებობს (ანუ ამ გრაფის ერთი ხელის მოსმით დახაზვა არ შეიძლება, თუ ერთ წიბოზე მაინც ორჯერ არ გადავივლით.



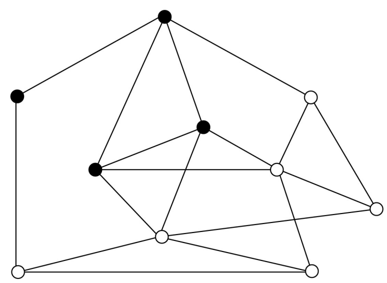
ნახ. 39: ორი გრაფის მაგალითი

იმის დასადგენად, თუ რომელი გრაფის შემოვლა შეიძლება ისე, რომ ყველა წიბო დაიფაროს *მხოლოდ* ერთხელ, შემოვიტანოთ შემდეგი განმარტება:

თუ მოცემულია გრაფი $G = \{V, E\}$, მისი ნებისმიერი $v \in V$ წვეროს *რიგი* $deg(v)$ ეწოდება მასთან მიერთებულ წიბოთა რაოდენობას. ცხადია, რომ ნებისმიერი გრაფის წვეროს რიგი შეიძლება იყოს ან კენტი, ან ლუწი. თუ წვეროს რიგია ლუწი, მას „ლუწიან", წინააღმდეგ შემთხვევაში კი „კენტიან" წვეროს ვუწოდებთ.

39 (ბ) ნახაზში მოყვანილი გრაფისათვის $deg(A) = 4$, ხოლო $deg(F) = 2$.

ქვემოთ მოყვანილია გრაფი, რომლის კენტიანი წვეროები თეთრადაა ნაჩვენები, ხოლო ლუწიანი კი - შავად.

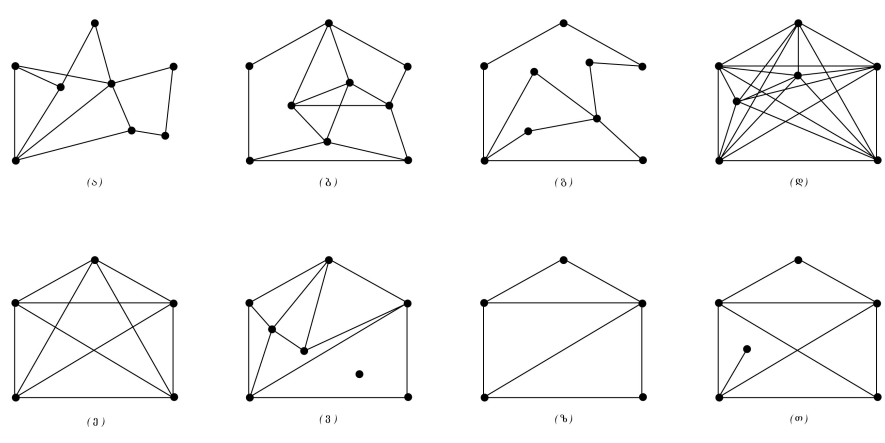


ნახ. 40: კენტიანი და ლუწიანი წვეროები გრაფში

ამ განმარტებაზე დაყრდნობით შეიძლება შემოვიტანოთ ეილერის ციკლის არსებობის კრიტერიუმი, რომელიც ეილერის თეორემის სახელითაა ცნობილი:

თეორემა 7.1: (ეილერის თეორემა გრაფში ციკლების არსებობის შესახებ)
ნებისმიერ გრაფში ეილერის ციკლი იარსებებს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მასში ***კენტიანი წვეროების*** რაოდენობა *არ* აჭარბებს ორს.
თუ გრაფში კენტიანი წვერო ***არ არსებობს***, მაშინ მასში მოიძებნება ეილერის ***ჩაკეტილი*** ციკლი: რომელი წვეროდანაც დავიწყებთ შემოვლას, იმაშივე დავამთავრებთ.
შენიშვნა: თუ გრაფში კენტიანი წვეროების რაოდენობაა ***ორი***, მაშინ მასში იარსებებს ეილერის ***ღია*** ციკლი: ერთი კენტიანი წვეროდან შემოვლას ვიწყებთ და მეორეში ვამთავრებთ.

სავარჯიშო 7.2: ნახ. 41-ში ნაჩვენები გრაფებიდან რომელს შეიძლება ჰქონდეს ეილერის ციკლი?
მითითება: დაითვალეთ კენტიანი წვეროების რაოდენობა.



ნახ. 41: გრაფების მაგალითები

სავარჯიშო 7.3: ნახ. 41-ში ნაჩვენებ გრაფებში დაითვალეთ ყოველი წვეროს რიგის ჯამი (მათემატიკურ ენაზე ეს შემდეგნაირად ჩაიწერება: მოცემული $G = (V, E)$ გრაფისათვის

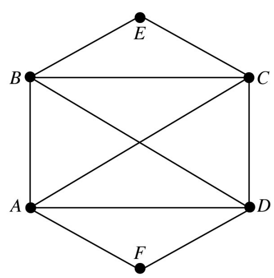
$$\sigma(G) = \sum_{v \in V} deg(v).$$

ეს რიცხვი შეადარეთ იმავე გრაფის წიბოების რაოდენობას. რა კანონზომიერება შეიძლება დავადგინოთ წვეროთა რიგების ჯამსა და წიბოების რაოდენობას შორის? მათემატიკურ ენაზე რომ ვთქვათ, რა დამოკიდებულებაა $\sigma(G)$ და $|E|$ რიცხვებს შორის? (აქ $|E|$ არის E სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა, რაც გრაფის წიბოთა რიცხვის ტოლია.)

სავარჯიშო 7.4: დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $G = (V, E)$ გრაფისათვის $\sigma(G) = 2|E|$.

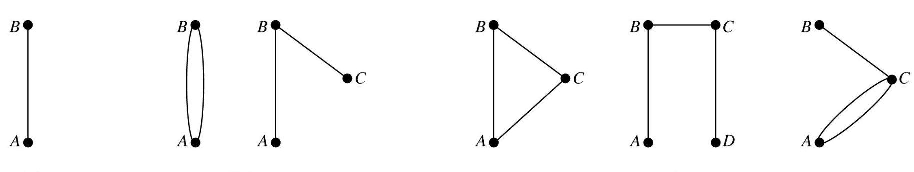
სავარჯიშო 7.5: დაამტკიცეთ, რომ არ იარსებებს ისეთი გრაფი, რომელშიც კენტიანი წვეროების რაოდენობა იქნება კენტი რიცხვი (ანუ ყველა გრაფში კენტიანი წვეროების რაოდენობა ლუწია: $\forall G = (V, E), \exists i \in \mathbb{N}, \sigma(G) = 2 \cdot i$).

სავარჯიშო 7.6: დახაზეთ გრაფი, რომელიც წარმოიშვება ნახ. 42 ნაჩვენები გრაფიდან *(ა)* $ABCD$, *(ბ)* $ABECA$, *(გ)* BEC და *(დ)* $FDBCE$ გზების ამოგდების შედეგად.



ნახ. 42: გრაფის მაგალითი

ახლა კი შეგვიძლია ***ეილერის თეორემის დამტკიცება:***
ჯერ დავამტკიცოთ, რომ თუ კენტიანი წვეროების რაოდენობა აჭარბებს ორს, ასეთი ციკლი ვერ იარსებებს.
როდესაც ვიწყებთ გრაფზე შემოვლას, ცხადია, რომ ერთი წვეროდან უნდა დავიწყოთ და მეორეში უნდა დავამთავროთ. ყველა დანარჩენ წვეროში რამდენჯერაც *შევალთ*, ზუსტად იმდენჯერ უნდა *გამოვიდეთ*. აქედან გამომდინარე, მასთან მიერთებულ წიბოთა რაოდენობა უნდა იყოს *ლუწი*. ესე იგი, თუ კენტიან წვეროთა რაოდენობა ორზე მეტია, ერთიდან დავიწყებთ, მეორეში დავამთავრებთ, მაგრამ დაგვრჩება ისეთი წვეროც, რომელშიც გრაფის შემოვლისას შევალთ და ვეღარ გამოვალთ ისე, რომ უკვე გავლილ წვეროს მეორედ არ გადავუაროთ.
ახლა კი ინდუქციაზე დაყრდნობით დავამტკიცოთ, რომ ისეთ გრაფებში, სადაც კენტიან წვეროთა რაოდენობა ზუსტად ორია, იარსებებს ეილერის გახსნილი ციკლი, ხოლო ისეთში, სადაც კენტიანი წვერო არ არსებობს, ეილერის შეკრული ციკლი იარსებებს.
დასაწყისისათვის განვიხილოთ ერთ, ორ და სამ წიბოიანი გრაფები (ნახ. 43).

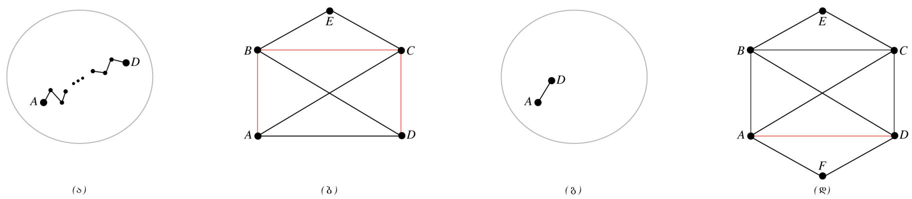


ნახ. 43: ერთ, ორ და სამ წიბოიანი გრაფები

ინდუქციის შემოწმება: ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ გრაფებში ეილერის თეორემა ჭეშმარიტია.

ინდუქციის დაშვება: დავუშვათ, რომ ეილერის თეორემა ჭეშმარიტია ყველა ბმული გრაფისათვის, რომლის წიბოთა რაოდენობა ნაკლებია რაღაცა n რიცხვზე.

ინდუქციის ბიჯი: დავამტკიცოთ თეორემა ნებისმიერი n წიბოიანი გრაფისათვის.
დავუშვათ, რომ ასეთ გრაფს ორი კენტიანი წვერო A და D აქვს. რადგან ჩვენ ბმულ გრაფებს განვიხილავთ, უნდა არსებობდეს გზა A წვეროდან D წვეროში, რომელიც კიდევ რაღაცა წვეროებზე გაივლის (ნახ. 44 (ა)). ასეთი გრაფის კონკრეტული მაგალითი მოყვანილია ნახაზში 44 (ბ) (იქ გამოყოფილი გზა A წვეროდან D წვეროში სხვა ფერითაა შეღებილი).



ნახ. 44: ზოგადი გრაფები

თუ ერთ-ერთ ასეთ გზას ამოვირჩევთ და მის წიბოებს გრაფიდან ამოვშლით (უნდა მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ამოშლის შედეგად გრაფი არ დაიშალოს ცალკეულ ნაწილებად), მივიღებთ სხვა გრაფს, რომელსაც *მხოლოდ* ლურიანი წიბოები აქვთ.

სავარჯიშო 7.7: დაამტკიცეთ, რომ ზემოთ მოყვანილი გრაფიდან შერჩეული გზის ამოგდების შედეგად მიღებულ გრაფში *მხოლოდ* ლუწიანი წვეროები დაგვრჩება.

რადგან დარჩენილ გრაფში წიბოების რაოდენობა n რიცხვზე ნაკლები იქნება, მისთვის ჭეშმარიტი იქნება ეილერის თეორემა და ***იარსებებს*** ისეთი ჩაკეტილი ციკლი, რომელიც A წვეროში დაიწყება და მასშივე დასრულდება. შემდეგ კი *ამოგდებული გზის* წიბოებით გადავალთ A წვეროდან D წვეროში, რითაც საწყის n წიბოიან გრაფში შევადგენთ ეილერის ღია ციკლს.

ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერ n წიბოიან გრაფში, რომელიც არ შეიცავს კენტიან წვეროებს, არსებობს ეილერის ჩაკეტილი ციკლი, მხოლოდ აქ უკვე ორ მეზობელ წვეროს ვიღებთ და მათ შემაერთებელ წიბოს ამოვაგდებთ (იმ პირობით, რომ ამ წიბოს ამოგდების შემდეგ გრაფი ორ ნაწილად არ დაიშლება).

სავარჯიშო 7.8: დაამტკიცეთ, რომ თუ მოცემულია n წიბოიანი გრაფი, რომელიც არ შეიცავს კენტიან წვეროებს, მასში ეილერის ჩაკეტილი ციკლი იარსებებს.

სავარჯიშო 7.9: დაწერეთ ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი მოცემული გრაფისათვის განსაზღვრავს, არსებობს თუ არა მასში ეილერის ციკლი.

ალგორითმების თეორიასა და პრაქტიკაში ზალიან მნიშვნელოვანია ე.წ. ***ჰამილტონის ციკლის*** ამოცანა: მოცემული გრაფისთვის განსაზღვრეთ, შეიძლება თუ არა მასში მოვძებნოთ ისეთი გზა, რომელიც ***ყველა*** წიბოზე გაივლის ზუსტად ერთხელ და დაბრუნდება იმავე წიბოში, საიდანაც დაიწყო შემოვლა?

სავარჯიშო 7.10: ნახ. 41-ში მოყვანილი გრაფებიდან რომლებს აქვთ ჰამილტონის ციკლი?

თუ ნებისმიერ გრაფში ეილერის ციკლის არსებობის დადგენა საკმაოდ ადვილად შეიძლება, ჰამილტონის ციკლის არსებობის დასადგენად დღეისათვის ცნობილი ყველა ალგორითმი ძალიან ნელა მუშაობს და დიდი გრაფებისათვის გამომთვლელ მანქანებზე ათასობით წელსაც კი მოანდომებს.
ეს შეიძლება იმით იყოს გამოწვეული, რომ ამ ამოცანისათვის ჯერ-ჯერობით ვერავინ მოიფიქრა სწრაფი ალგორითმი, ან იმით, რომ ასეთი ალგორითმი ***არ არსებობს***. მაგრამ რადგან ჰამილტონის ციკლის ამოცანა *უაღრესად მნიშვნელოვანია*, ეს ცენტრალური ღია საკითხია კომპიუტერულ მეცნიერებებში.

როგორც აქამდე ვნახეთ, გრაფების წარმოდგენა შეიძლება სიმრავლეების სახით. მეორენაირად გრაფის წარმოდგენა ე.წ. *ბმულობის მატრიცით* მატრიცებით შეიძლება. მაგალითისათვის განვიხილოთ ნახ. 42-ში მოყვანილი გრაფი.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	1
B	1	0	1	1	1	0
C	1	1	0	1	1	0
D	1	1	1	0	0	1
E	0	1	1	0	0	0
F	1	0	0	1	0	0

ზოგადად, $A = (a_{i,j})_{i=1}^{n}$ რაიმე $G = (V, E)$ გრაფის ბმულობის მატრიცია, თუ $V = \{v_1, ..., v_n\}$ და

$$(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow a_{i,j} = 1.$$

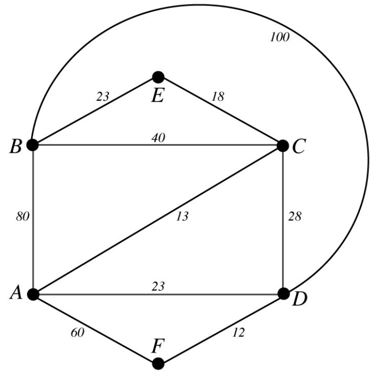
ზემოთ მოყვანილ მაგალითში გრაფის ბმულობის მატრიცი იქნება

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

სავარჯიშო 7.11: შეადგინეთ ნახ. 41-ში ნაჩვენები გრაფების ბმულობის მატრიცები.

სავარჯიშო 7.12: არსებობს თუ არა ისეთი გრაფი, რომლის ბმულობის მატრიცი არაა სიმეტრიული (ანუ $\exists i, j$ ისეთი, რომ $a_{i,j} \neq a_{j,i}$)?

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: მოცემულია რუკა, რომელზეც ნაჩვენებია ქალაქები და მათი შემაერთებელი გზები (ანუ მოცემულია გრაფი, სადაც წვერო რომელიღაცა ქალაქს აღნიშნავს, ხოლო წიბო - ორი ქალაქის შემაერთებელ გზას).



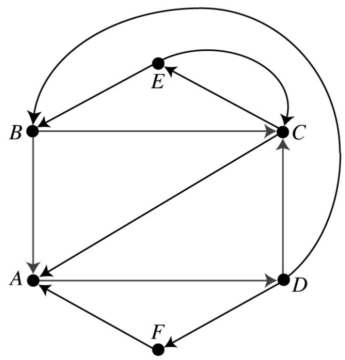
ნახ. 45: რუკის გრაფი

ამას გარდა, ყოველ წიბოს გვერდით აწერია რაღაც რიცხვი, რომელიც მოცემულ ორ ქალაქს შორის არსებული გზის სიგრძეს აღნიშნავს.
აღსანიშნავია, რომ ეს გრაფი მხოლოდ რაღაც ინფორმაციას იძლევა და მისი წვეროების განლაგება სიბრტყეზე, ფაქტიურად, ნებისმიერი შეიძლება იყოს. ასე, მაგალითად, ADF სამკუთხედში შესაბამისი წიბოების წონები არ აკმაყოფილებენ სამკუთხედის უტოლობას, მაგრამ მოცემულ ამოცანაში შესაძლებელია, რომ, მაგალითად, გზა იყოს არაპირდაპირი.

მოცემული გრაფის ბმულობის მატრიცი იქნება

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 13 & 23 & 0 & 60 \\ 80 & 0 & 40 & 100 & 23 & 0 \\ 13 & 40 & 0 & 28 & 18 & 0 \\ 23 & 100 & 28 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 23 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

თუ გრაფში წიბოები მიმართულია (ესე იგი, ისრითაა ნაჩვენები, თუ რომელი წვეროდან რომლისაკენაა მიმართული წიბო), მაშინ მისი შეერთების მატრიცი იქნება არასიმეტრიული (ნახ. 46).

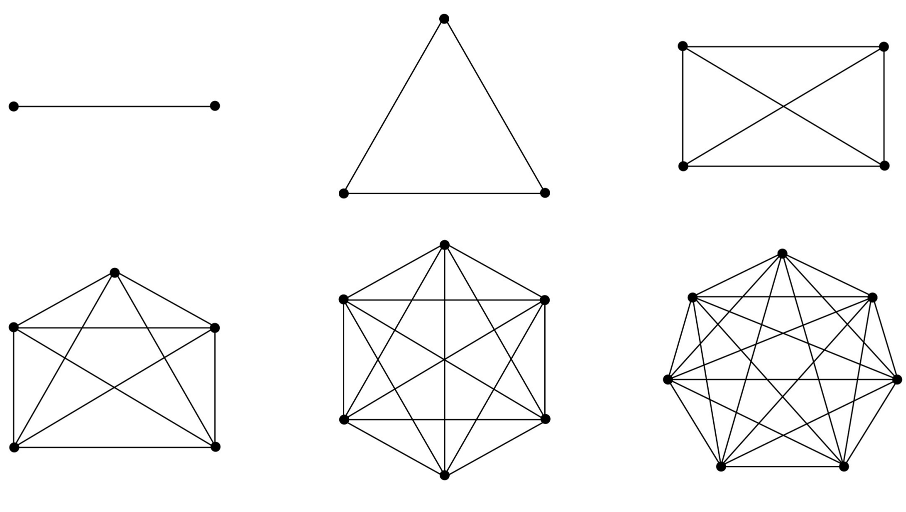


ნახ. 46: მიმართული გრაფი

ამ მაგალითში გვაქვს წიბო A წვეროდან D წვეროში, მაგრამ არა პირიქით. ზემოთ მოყვანილი გრაფის მატრიცი იქნება

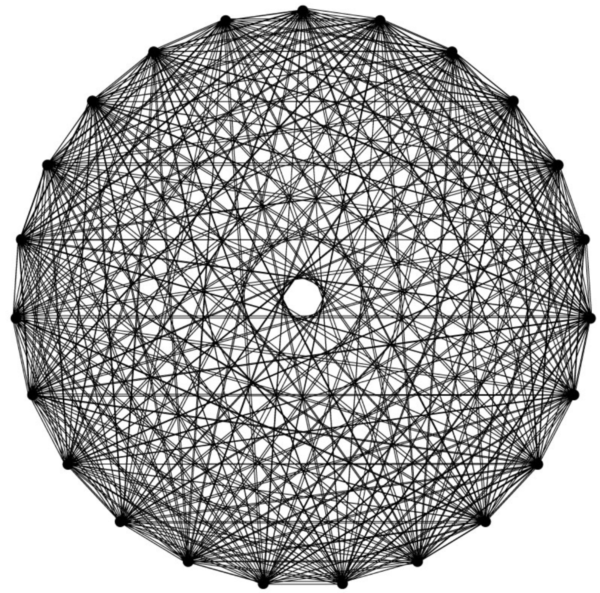
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

გრაფს ეწოდება ***სრული***, თუ მისი ყველა წვერო ერთმანეთთანაა დაკავშირებული. n წვეროიანი სრული გრაფი აღინიშნება როგორც K_n. მახაზში 47 ნაჩვენებია ორ, სამ, ოთხ, ხუთ, ექვს და შვიდ წვეროიანი სრული გრაფები.



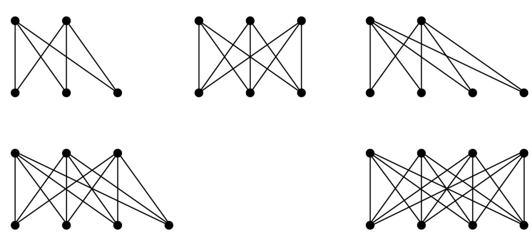
ნახ. 47: $K_i, 2 \leq i \leq 7$

ცხადია, რომ დიდი სრული გრაფი საკმაოდ ზნელი დასახატია. მაგალითისათვის მოგვყევავს K_{23} (ნახ. 48).



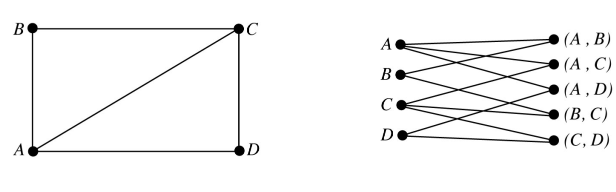
ნახ. 48: K_{23}

თეორიასა და პრაქტიკაში ზალიან მნიშვნელოვანია ე.წ. *ორად გაყოფილი სრული* გრაფი, რომლის ცვეროები ორ სიმრავლედ შეგვიძლია გავყოთ ისე, რომ თითოეულ სიმრავლეში შესული წვეროები ერთმანეთთან შეერთებული არაა, სამაგიეროდ ერთი სიმრავლის წვერო მეორე სიმრავლის *ყველა* წვეროსთანაა მიერთებული. ორად დაყოფილ სრულ გრაფს, რომლის ერთ სიმრავლეში n, ხოლო მეორეში კი m წვეროა, აღნიშნავენ როგორც $K_{n,m}$. ნახაზში 49 მოყვანილია მცირე ზომის ორად დაყოფილი სრული გრაფები.



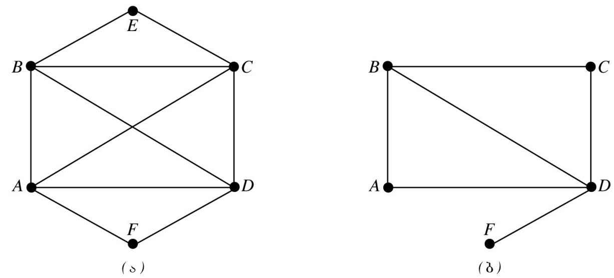
ნახ. 49: $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{2,4}$, $K_{3,4}$, $K_{4,4}$

აღსანიშნავია, რომ ორად დაყოფილი გრაფი შეიძლება სრული არ იყოს, ანუ ერთი სიმრავლის წვერო მეორე სიმრავლის რომელიმე წვეროსთან მიერთებული არ იყოს.
ორად დაყოფილი გრაფების შესწავლა ზალიან მნიშვნელოვანი საკითხია, რადგან ***ნებისმიერ*** გრაფს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი ორად დაყოფილი გრაფი, რომელიც შემდეგნაირად იგება:
ერთ სიმრავლეში გავაერთიანებთ მოცემული გრაფის წვეროებს, ხოლო მეორეში კი დავუმატებთ იმდენ ახალ წვეროს, რამდენი წიბოცაა მოცემულ გრაფში (ყოველ წიბოს ერთი ახალი წვერო შეესაბამება) და შემდეგ პირველი სიმრავლიდან ზუსტად ორ წვეროს მეორე სიმრავლის ერთ წვეროსთან შევაერთებთ, თუ ეს ორი წვერო საწყის გრაფში წიბოთი იყო შეერთებული (მაგალითისათვის იხ. ნახ. 50).



ნახ. 50: გრაფი და მისი შესაბამისი ორად დაყოფილი გრაფი

ასევე ძალიან მნიშვნელოვანია *ქვეგრაფის*, ანუ გრაფის „ნაწილის" ცნება. თუ ერთი გრაფი მეორედან წვეროებისა და მათი შემაერთებელი წიბოებისაგან ან წიბოების ნაწილისაგან შედგება, მაშინ ამ გრაფს მეორე გრაფის *ქვეგრაფს* უწოდებენ (ნახ. 51).



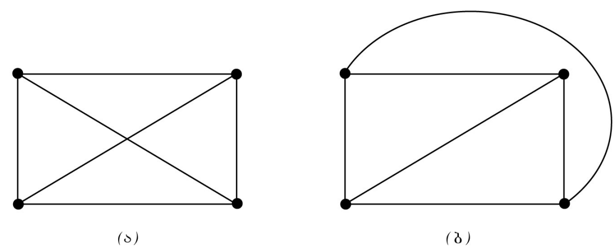
ნახ. 51: გრაფი (ა) და მისი ერთ-ერთი ქვეგრაფი

აღსანიშნავია, რომ ერთ გრაფს შეიძლება მრავალი ქვეგრაფი ჰქონდეს.

<u>სავარჯიშო 7.13:</u> მოიყვანეთ ნახ. 51 (ა)-ში მოყვანილი გრაფის ხუთი ქვეგრაფის მაგალითი.

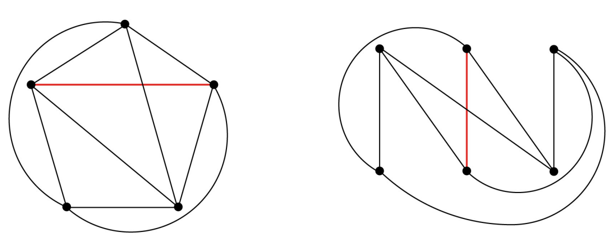
ზოგადად, იმის გარკვევა, არის თუ არა ერთი გრაფი მეორეს ქვეგრაფი, ძალიან რთულია: დღეისათვის არ არის ცნობილი ისეთი ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი ორი G და G' გრაფისათვის ***სწრაფად*** გაარკვევს, არის თუ არა G გრაფი G' გრაფის ქვეგრაფი.

ახლა კი განვიხილოთ ნახ. 52-ში მოყვანილი გრაფის ორნაირი დიაგრამა.



ნახ. 52: ერთი გრაფის ორნაირი დახატვა

როგორც ვხედავთ, ერთში ორი წიბო იკვეთება, მეორეში კი - არა. ისეთ გრაფს, რომლის დახატვა ისეთნაირად შეიძლება, რომ წიბოებმა ერთმანეთი არ გადაკვეთონ, ***ბრტყელი*** ეწოდება.
ძალიან მნიშვნელოვანია შემდეგი ამოცანა: მოცემული გრაფისათვის გაარკვიეთ, შეიძლება თუ არა მისი ბრტყლად დახატვა.
როგორც აღმოჩნდა, უმცირესი *არაბრტყელი* გრაფების მაგალითებია K_5 და $K_{3,3}$.



ნახ. 53: მინიმალური არაბრტყელი გრაფები

აქედან გამომდინარე, ვერც ერთი გრაფი, რომელიც ამ ორიდან ერთ-ერთს მაინც შეიცავს, ბრტყლად *ვერ* დაიხატება.