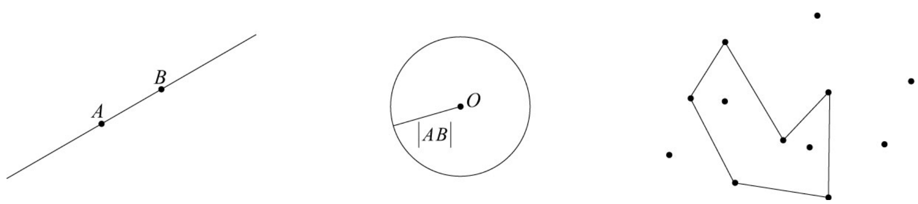
2.3 ძველი ბერძნული ამოცანები

ანტიკურ საბერძნეთში დასვეს ე.წ. „ფარგლითა და სახაზავით აგების" გეომეტრიული ამოცანები. აღსანიშნავია, რომ რამოდენიმე ამოცანა 2000 წელზე მეტ ხანს ამოუხსნელი რჩებოდა, სანამ XIX საუკუნეში მათემატიკურად არ დამტკიცდა, რომ მათი ალგორითმული გადაჭრა შეუძლებელია. ეს, ალბათ, ყველაზე ძველი ამოცანებია, რომელთაც ალგორითმული ამოხსნა არ აქვთ.

მოცემულია: ფარგალი, სახაზავი და ორი წერტილი სიბრტყეზე; რაიმე გეომეტრიული ფიგურა; რაიმე ნამდვილი რიცხვი ξ.

შეზღუდვა: სახაზავით შეიძლება მოცემულ ორ წერტილზე A და B წრფის გავლება. თუ მოცემულია ნებისმიერი ორი წერტილი A, B და ნებისმიერი მესამე წერტილი O, ფარგლით შეიძლება O წერტილიდან $|A, B|$ სიგრძის რადიუსის მქონე წრეწირის შემოვლება (ნახ. 18).



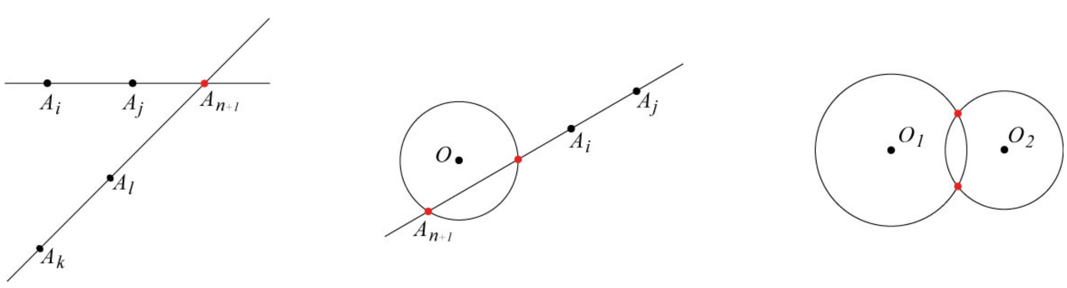
ნახ. 18: სახაზავით (მარცხნივ), ფარგლით (შუაში) და წერტილებზე აგებული ფიგურები

თუ მოცემულია უკვე აგებულ წერტილთა რაიმე სიმრავლე $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, ამ სიმრავლის რამოდენიმე წერტილზე გავლებულ შეკრულ ტეხილს ფარგლითა და სახაზავით აგებული ფიგურა ეწოდება.

ახალი A_{n+1} წერტილი ითვლება ფარგლითა და სახაზავით აგებულად, თუ:

- $\exists\, A_i, A_j, A_k, A_l \in \mathcal{S}$ და A_{n+1} არის A_i, A_j წერტილებზე გავლებული წრფისა და A_k, A_l წერტილებზე გავლებული წრფის გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 19 მარცხნივ);
- $\exists\, A_i, A_j, A_k, A_l, O \in \mathcal{S}$ და A_{n+1} არის A_i, A_j წერტილებზე გავლებული წრფისა და O წერტილზე $|A_k, A_l|$ სიგრძის რადიუსის მქონე წრეწირის გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 19 შუაში);
- $\exists\, A_i, A_j, A_k, A_l, O_1, O_2 \in \mathcal{S}$ და A_{n+1} არის O_1 წერტილზე $|A_k, A_l|$ სიგრძის რადიუსის მქონე წრეწირისა და O_2 წერტილზე $|A_i, A_j|$ სიგრძის რადიუსის მქონე წრეწირის გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 19 მარჯვნივ).

შენიშვნა: $A_i, A_j, A_k, A_l, O_1, O_2 \in \mathcal{S}$ წერტილთა შორის რამოდენიმე შეიძლება ერთმანეთს ემთხვეოდეს.



ნახ. 19: ფარგლითა და სახაზავით ახალი წერტილების აგების შესაძლებლობები

რაიმე გეომეტრიული ფიგურა ითვლება აგებულად, თუ ფარგლითა და სახაზავით ზემოთ აღწერილი წესების დაცვით აიგება ისეთი სიმრავლე $\mathcal{S}$, რომ მასში მოიძებნოს ისეთი წერტილები, რომელთა ტეხილებით შეერთება ამ საძიებელ ფიგურას მოგვცემს.

რაიმე რიცხვი ξ ითვლება აგებულად, თუ ფარგლითა და სახაზავით ზემოთ აღწერილი წესების დაცვით აიგება ისეთი სიმრავლე $\mathcal{S}$, რომ მასში მოიძებნოს ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილია ξ.

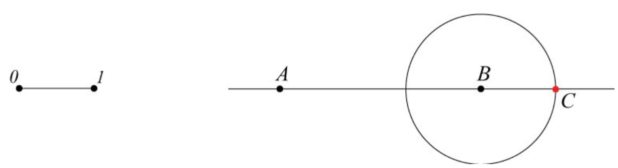
შედეგი: მოცემული გეომეტრიული ფიგურისთვისა ან რიცხვისთვის დაადგინეთ, შეიძლება თუ არა მათი ფარგლითა და სახაზავით აგება.

დასაწყისისათვის მოცემულია ორი წერტილი A და B, რომელთა შორის მანძილი ერთის ტოლადაა მიჩნეული: $|A, B| = 1$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, აგებულია რიცხვი 1. იმისათვის, რომ ავაგოთ რიცხვი 2 (ანუ ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით ავაგოთ ისეთი წერტილები, რომელთა შორის მანძილი ორის ტოლია), შემდეგი ალგორითმი უნდა გამოვიყენოთ:

მოცემულია: ორი წერტილი A და B.

1. A და B წერტილებზე გაავლე წრფე;
2. ფარგლით შემოხაზე წრეწირი ცენტრით B წერტილში და რადიუსით 1;

   ეს წრეწირი AB წრფეს გადაკვეთს ორ წერტილში: D (წერტილიდან მარცხნივ) და ახალ C წერტილში, B წერტილიდან მარჯვნივ.
3. პასუხად გამოიტანე ორი წერტილი: A და C.



ნახ. 20: $|A, B| + 1$ სიგრძის მონაკვეთის აგება

ეს ალგორითმი აღვნიშნოთ როგორც N. თუ მისი მონაცემებია A და B წერტილები, $N(A, B) = (A, C)$. ადვილი საჩვენებელია, რომ $|A, C| = |A, B| + 1$.

ესე იგი, თუ მოცემულია ორი წერტილი A და B, რომელთა შორის მანძილია 1, შეიძლება $n \in \mathbb{N}$ რიცხვის აგება შემდეგი რეკურსიული ალგორითმით:

- $P_1 = (A, B)$;
- $P_n = N(P_{n-1})$.

სავარჯიშო 2.1: მოცემულია ოთხი წერტილი A, B, C, D. რა ალგორითმით შეიძლება $|A, B| + |C, D|$ სიგრძის მონაკვეთის აგება? გამოითვალეთ ამ ალგორითმის ბიჯების რაოდენობა და დაამტკიცეთ მისი სისწორე.

სავარჯიშო 2.2: მოცემულია ორი წერტილი A, B, სადაც $|A, B| > 1$. შეადგინეთ ალგორითმი, რომელიც $|A, B| - 1$ სიგრძის მონაკვეთს ააგებს. გამოითვალეთ ამ ალგორითმის ბიჯების რაოდენობა და დაამტკიცეთ მისი სისწორე.

თუ მოცემულია ორი წერტილი A და B, ადვილად შეიძლება $[A, B]$ მონაკვეთის შუა პერპენდიკულარული წრფის აგება, ანუ ისეთი ორი წერტილის აგება, რომლებზე გამავალი წრფეც ამ მონაკვეთის პერპენდიკულარულია და მის შუა წერტილზე გადის (ცხადია, რომ იგივე ალგორითმით შეიძლება ამავე მონაკვეთის შუა წერტილის დადგენა):

მოცემულია: ორი წერტილი A და B (ნახ. 21 *(ა)*).

- A წერტილზე შემოავლე $|A, B|$ რადიუსის წრეწირი;
- B წერტილზე შემოავლე $|A, B|$ რადიუსის წრეწირი (ნახ. 21 *(ბ)*)

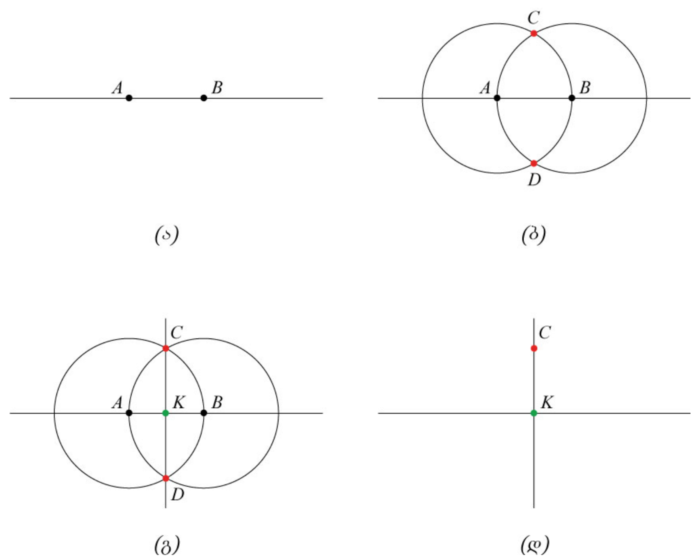
  შედეგი: ამ ორი წრეწირის გადაკვეთის წერტილები C და D.

- შეაერთე C და D წერტილები წრფით (ნახ. 21 *(გ)*).

  შედეგი: ამ წრფისა და A, B მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილი K.

- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი C და K (ნახ. 21 *(დ)*).

ცხადია, რომ C და K წერტილებზე გავლებული წრფე $[A, B]$ მონაკვეთის შუა პერპენდიკულარულია.



ნახ. 21: $[A, B]$ მონაკვეთის შუა პერპენდიკულარულის აგება

ეს ალგორითმი აღვნიშნოთ როგორც $P(A, B)$. ამრიგად, $P(A, B) = (C, K)$, სადაც K $[A, B]$ მონაკვეთის შუა წერტილია.

თუ მოცემულია ორი წერტილი A და B და ერთი წერტილი C, რომელიც არ მდებარეობს (A, B) წრფეზე, მაშინ შეიძლება C წერტილიდან (A, B) წრფეზე პერპენდიკულარული წრფის დაშვება, ანუ ისეთი D წერტილის აგება (A, B) წრფეზე, რომ (C, D) წრფე (A, B) წრფის პერპენდიკულარული იყოს:

მოცემულია: ორი წერტილი A და B და ერთი წერტილი C, რომელიც არ დევს (A, B) წრფეზე (ნახ. 22 *(ა)*).

- C წერტილზე შემოავლე $|A, C|$ რადიუსის წრეწირი (ნახ. 22 *(ბ)*);

  შედეგი: ამ წრეწირისა და (A, B) წრფის გადაკვეთის მეორე წერტილი L.

- ჩაატარე ალგორითმი $P(A, L)$.

  შედეგი: ორი წერტილი K და T, რომელთაგან T დევს (A, B) წრფეზე (ნახ. 22 *(გ)*).

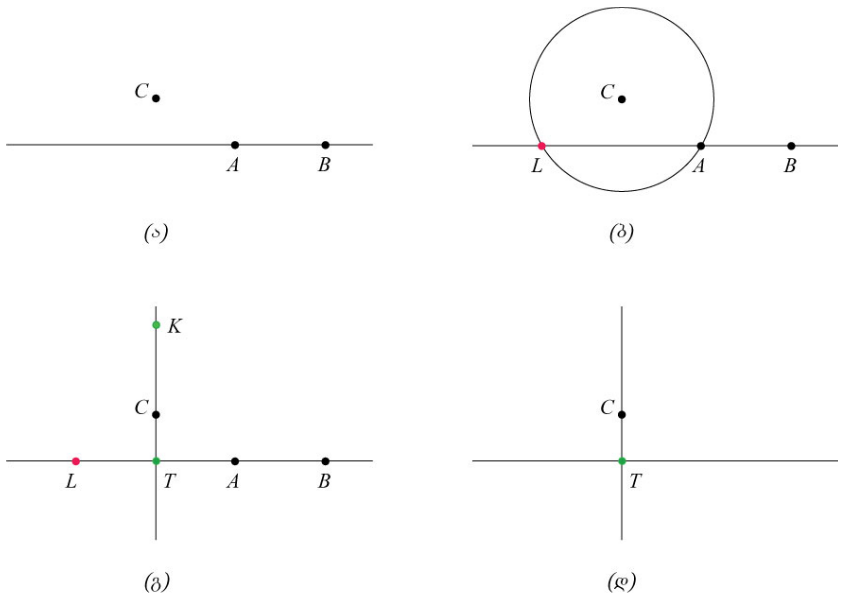
- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი C და T (ნახ. 22 *(დ)*).

<u>სავარჯიშო 2.3:</u> ზემოთ მოყვანილ ალგორითმში A და L წერტილებზე უნდა ჩავატაროთ $P(A, L)$ ალგორითმი. დაწვრილებით აღწერეთ ნახაზებით ეს პროცესი, რომლის შედეგადაც მიიღება K და T წერტილები.

<u>სავარჯიშო 2.4:</u> რა მოხდება, თუ C წერტილში $|A, C|$ რადიუსით გავლებული წრეწირი (A, B) წრფეს მხოლოდ ერთ წერტილში გადაკვეთს და მეორე L წერტილი არ მიიღება?

<u>სავარჯიშო 2.5:</u> ზემოთ მოყვანილ ალგორითმში, $P(A, L)$ ალგორითმის შესრულების შემდეგ, რატომ მიიღება ორი დამატებითი წერტილი K და T?

<u>სავარჯიშო 2.6:</u> დაამტკიცეთ, რომ (C, T) წრფე (A, B) წრფის პერპენდიკულარულია.



ნახ. 22: წერტილიდან წრფეზე პერპენდიკულარულის დაშვების პროცესი

<u>სავარჯიშო 2.7:</u> მოცემულია ერთ წრფეზე მყოფი სამი წერტილი A, B და მათ შორის მდებარე C. რა ალგორითმით შეიძლება C წერტილიდან (A, B) წრფის პერპენდიკულარული წრფის აგება?

<u>სავარჯიშო 2.8:</u> მოცემულია ორი წერტილი A და B და ერთი წერტილი C, რომელიც არ დევს (A, B) წრფეზე. რა ალგორითმით შეიძლება C წერტილიდან (A, B) წრფის პარალელური წრფის აგება (ანუ ისეთი D წერტილის აგება, რომ (C, D) წრფე (A, B) წრფის პარალელური იყოს)?

თუ აგებულია ორი რიცხვი $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, ანუ A_1, A_2, A_3, A_4 ისეთი, რომ $|A_1, A_2| = a_1$ და $|A_3, A_4| = a_2$, მაშინ შეიძლება ისეთი ორი B_1, B_2 წერტილის აგება ფარგლითა და სახაზავით, რომ $|B_1, B_2| = a_1 \cdot a_2$:

მოცემულია: ოთხი წერტილი A_1, A_2, A_3, A_4, სადაც $|A_1, A_2| = a_1$ და $|A_3, A_4| = a_2$.

- A_1 წერტილზე გაავლე (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარული წრფე (ნახ. 23 *(ა)*) ;
- ამ წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე ერთის ტოლი მონაკვეთი;

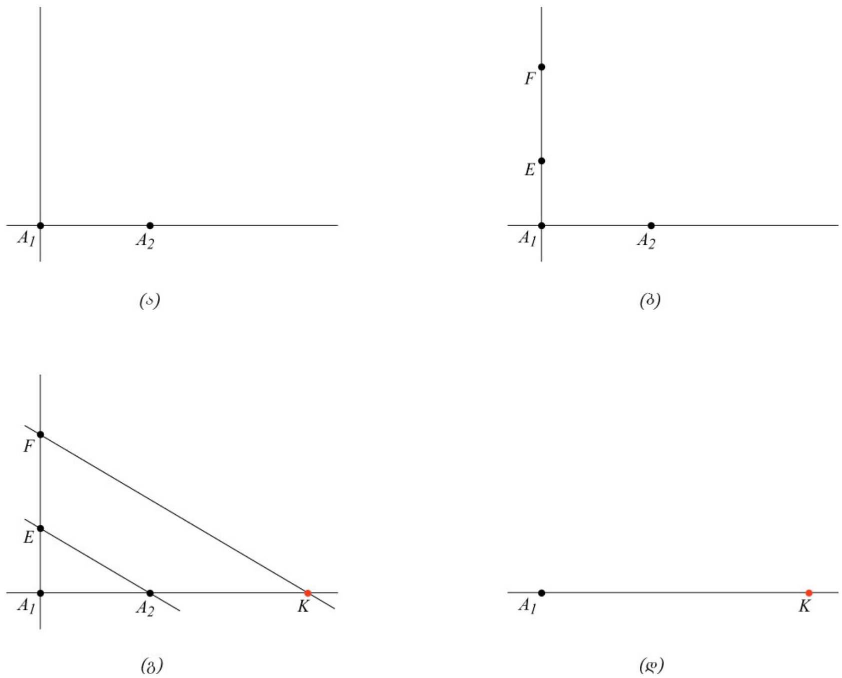
  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი E, სადაც $|A_1, E| = 1$ (ნახ. 23 *(ბ)*).
- იგივე წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე $|A_3, A_4|$ სიგრძის მონაკვეთი;

  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი F, სადაც $|A_1, F| = |A_3, A_4|$ (ნახ. 23 *(ბ)*).
- E და A_2 წერტილებზე გაავლე წრფე;
- F წერტილიდან გაავლე $|E, A_2|$ წრფის პარალელური წრფე;

  შედეგი: ამ წრფისა და (A_1, A_2) წრფის გადაკვეთის წერტილი K (ნახ. 23 *(გ)*).
- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი A_1 და K (ნახ. 23 *(დ)*).

<u>სავარჯიშო 2.9:</u> სამკუთხედების მსგავსებით დაამტკიცეთ, რომ $|A_1, K| = a_1 \cdot a_2$.

<u>სავარჯიშო 2.10:</u> დაამტკიცეთ, რომ თუ $a_2 < 1$, ალგორითმი მაინც სწორად მუშაობს.



ნახ. 23: $|A_1, A_2| \cdot |A_1, F|$ სიგრძის მონაკვეთის აგების პროცესი

ანალოგიურად შეიძლება $\frac{a_1}{a_2}$ სიგრძის მონაკვეთის აგება, თუ მოცემულია ოთხი წერტილი A_1, A_2, A_3, A_4, სადაც $|A_1, A_2| = a_1$ და $|A_3, A_4| = a_2$.

მოცემულია: ოთხი წერტილი A_1, A_2, A_3, A_4, სადაც $|A_1, A_2| = a_1$ და $|A_3, A_4| = a_2$.

- A_1 წერტილზე გაავლე (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარული წრფე (ნახ. 24 *(ა)*);
- ამ წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე ერთის ტოლი მონაკვეთი;

  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი E, სადაც $|A_1, E| = 1$ (ნახ. 24 *(ბ)*) .
- იგივე წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე $|A_3, A_4|$ სიგრძის მონაკვეთი;

  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი F, სადაც $|A_1, F| = |A_3, A_4|$ (ნახ. 24 *(ბ)*).
- F და A_2 წერტილებზე გაავლე წრფე;
- E წერტილიდან გაავლე $|F, A_2|$ წრფის პარალელური წრფე;

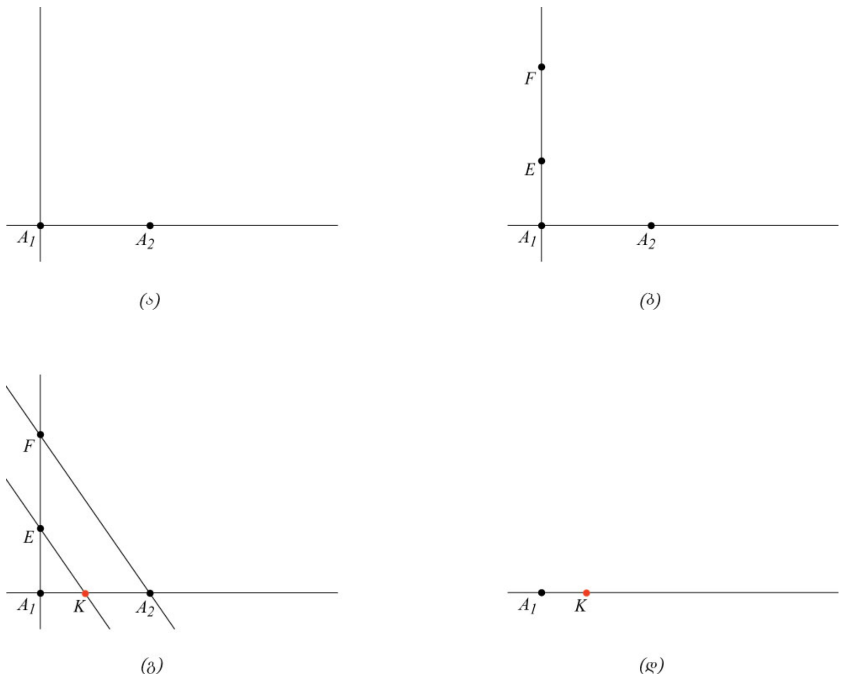
  შედეგი: ამ წრფისა და (A_1, A_2) წრფის გადაკვეთის წერტილი K (ნახ. 24 *(გ)*).
- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი A_1 და K (ნახ. 24 *(დ)*).

სავარჯიშო 2.11: სამკუთხედების მსგავსებით დაამტკიცეთ, რომ $|A_1, K| = \frac{a_1}{a_2}$.

ამრიგად ჩვენ გვაქვს ნებისმიერი რაციონალური რიცხვის აგების მეთოდი, ანუ ფარგლითა და სახაზავით მთლიანად შეიძლება აიგოს ნებისმიერი რაციონალურ რიცხვი $a \in \mathbb{Q}$.

ბუნებრივია შემდეგი შეკითხვა: შეიძლება თუ არა ირაციონალური რიცხვების აგება ფარგლითა და სახაზავით? პირველი ასეთი რიცხვი არის $\sqrt{2}$, რომელიც პითაგორას თეორემაზე დაყრდნობით აიგება:

მოცემულია: ორი წერტილი A_1, A_2.



ნახ. 24: $\frac{|A_1,A_2|}{|A_1,F|}$ სიგრძის მონაკვეთის აგების პროცესი

- A_1 წერტილზე გაავლე (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარული წრფე;
- ამ წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე ერთის ტოლი მონაკვეთი;

  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი E, სადაც $|A_1, E| = 1$.
- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი A_2 და E.

სავარჯიშო 2.12: დახაზეთ ზემოთ მოყვანილი ალგორითმის დიაგრამები ისე, როგორც ეს წინა ალგორითმებისთვის იყო ნაჩვენები.

სავარჯიშო 2.13: დაამტკიცეთ, რომ $|A_2, E| = \sqrt{2}$, თუ $|A_1, A_2| = 1$.

ამ ალგორითმს ვუწოდოთ S. ესე იგი, თუ მოცემულია ორი წერტილი A, B ისე, რომ $|A, B| = \sqrt{a}$, მაშინ $S(A, B) = (B, C)$, სადაც $|B, C| = \sqrt{a+1}$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ შემდეგი რეკურსიული ალგორითმი $H(n)$ ორ წერტილს გვაძლევს, რომელთა შორის მანძილია $\sqrt{n}$:

ალგორითმი $H(n)$:

- თუ $n = 1$, გამოიტანე ორი წერტილი A, B, სადაც $|A, B| = 1$ და ალგორითმი დაამთავრე;
- თუ $n > 1$:

  გაუშვი ალგორითმი $S(H(n-1))$.

სავარჯიშო 2.14: ზემოთ მოყვანილი ალგორითმების საფუძველზე შეადგინეთ ალგორითმი, რომელიც ფესვს ნებისმიერი რაციონალური რიცხვიდან გამოიანგარიშებს.

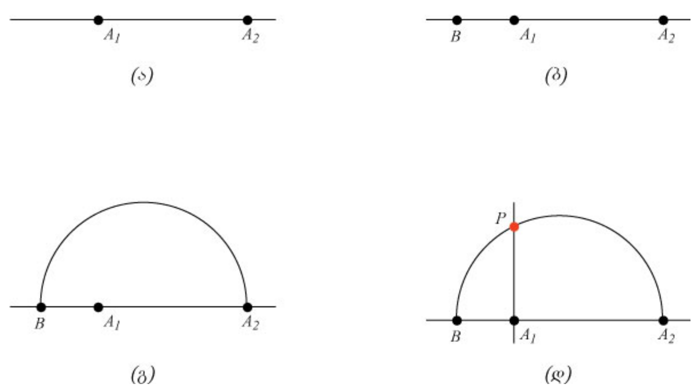
ახლა კი განვიხილოთ შემდეგი ალგორითმი:

მოცემულია: ორი წერტილი A_1, A_2, სადაც $|A_1, A_2| = \xi$ (ნახ. 25 *(ა)*).

- A_1 წერტილის მარცხნივ (A_1, A_2) წრფეზე გადაზომე ერთის ტოლი მონაკვეთი და მიღებული წერტილი იყოს B, ანუ $|B, A_1| = 1$ (ნახ. 25 *(ბ)*);

- შემოავლე წრეწირი დიამეტრით $[B, A_2]$ (ნახ. 25 *(გ)*);
- A_1 წერტილიდან აღმართე (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარული წრფე (ნახ. 25 *(დ)*);

  შედეგი: ამ წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილი P (ნახ. 25 *(დ)*).
- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი A_1 და P.



ნახ. 25: $\sqrt{|A_1, A_2|}$ სიგრძის მონაკვეთის აგების პროცესი

სავარჯიშო 2.15: სამკუთხედების მსგავსებით დაამტკიცეთ, რომ $|A_1, P| = \sqrt{|A_1, A_2|} = \sqrt{\xi}$.

სავარჯიშო 2.16: მოცემულია ორი წერტილი A და B. რა ალგორითმით შეიძლება წრეწირის შემოვლება, რომლის დიამეტრია $[A, B]$?

სავარჯიშო 2.17: მოცემულია სამი წერტილი O, A და B. O წერტილიდან გამოდის ორი სხივი $[O, A[$ და $[O, B[$, რომელიც O წერტილში ქმნის კუთხეს α. დაწერეთ ალგორითმი, რომელიც O, A და B მონაცემზე პასუხად მოგვცემს სამ წერტილს O, A და C ისე, რომ $\angle AOC = \frac{\alpha}{2}$.

ანტიკური ამოცანები:

- წრის კვადრატურა: მოცემულია O წერტილი და მის გარშემო შემოვლებული წრეწირი რადიუსით 1. ამ წრის ფართობია π. შეიძლება თუ არა იგივე ფართობის კვადრატის აგება მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით?
- მესამე ხარისხის ფესვი: მოცემულია ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილია a. შეიძლება თუ არა მხოლოდ ფარგლითა და სახაზავით ისეთი ორი წერტილის აგება, რომელთა შორის მანძილია $\sqrt[3]{a}$?
- სამმაგი ბისექტრისა: მოცემულია სამი წერტილი O, A და B. O წერტილიდან გამოდის ორი სხივი $[O, A[$ და $[O, B[$, რომელიც O წერტილში ქმნის კუთხეს α. შეიძლება თუ არა მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით ავაგოთ ისეთი წერტილი C, რომ $\angle AOC = \frac{\alpha}{3}$?
- წესიერი მრავალკუთხედები: რამდენკუთხა წესიერი მრავალკუთხედის აგება შეიძლება მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით? (ამოზნექილ მრავალკუთხედს ეწოდება წესიერი, თუ მისი ყველა გვერდი ერთმანეთის ტოლია.)

როგორც აღმოჩნდა, პირველი სამი ამოცანა ამოუხსნადია: არ არსებობს ისეთი ალგორითმი, რომელიც მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით ააგებს ორ წერტილს, რომელთა შორის მანძილია π; ან ისეთი ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი a რიცხვიდან მესამე ხარისხის ფესვს ამოიღებს ან ისეთი ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერ კუთხეს სამად გაყოფს (ისე, როგორც ის ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი რიცხვიდან კვადრატულ ფესვს ამოიღებს ან ნებისმიერ კუთხეს ორად გაჰყოფს).

ამის დამტკიცების იდეა შემდეგია:

ახალი წერტილის აგება შეიძლება მხოლოდ როგორც უკვე აგებულ წერტილებზე გავლებული ორი წრფის, ორი წრეწირისა ან ერთი წრეწირისა და ერთი წრფის გადაკვეთის წერტილისა. თუ ავაგებთ ორი გეომეტრიული ფიგურის გადაკვეთის წერტილს, მაშინ მისი დაშორება კოორდინატთა სათავიდან გამოითვლება შემდეგი პოლინომიური განტოლების ამონახსნით: $a_x^{2^n} + a_{2^n-1}x^{2^n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, სადაც n რაღაცა ნატურალური რიცხვია.
რადგან $\sqrt[3]{a}$ არ არის ასეთი სახის პოლინომის (ანუ ორის ხარისხის რიგის პოლინომის) ამონახსნი, ამიტომ ამ რიცხვის ფარგლითა და სახაზავით აგება შეუძლებელია.
როგორც XIX საუკუნეში გერმანელმა მათემატიკოსმა ლინდემანმა დაამტკიცა, π ტრანსცენდენტული რიცხვია, ანუ იგი არ არის არანაირი პოლინომიური განტოლების ამონახსნი და მით უმეტეს ვერ იქნება ორის ხარისხის რიგის განტოლების ამონახსნი, რითაც მტკიცდება, რომ ფარგლითა და სახაზავით π რიცხვის აგება შეუძლებელია.

მაგრამ არსებობს ფორმულა, რომელიც გვეუბნება, თუ რამდენ კუთხა წესიერი მრავალკუთხედის აგება შეიძლება მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით: n კუთხა წესიერი მრავალკუთხედის აგება შეიძლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\exists m, q_1, ..., q_l \in \mathbb{N}_0$ ისე, რომ $n = 2^m \cdot (2^{2^{q_1}} + 1) \cdot (2^{2^{q_2}} + 1) \cdots (2^{2^{q_l}} + 1)$.
ამ ფორმულიდან გამომდინარე შეიძლება წესიერი ხუთკუთხედის, ცხრამეტკუთხედისა და 65537 კუთხედის აგება, მაგრამ არ შეიძლება წესიერი 7-კუთხედის აგება.

სავარჯიშო 2.18: შეადგინეთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეიძლება წესიერი ექვსკუთხედის აგება.

სავარჯიშო 2.19: შეადგინეთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეიძლება წესიერი რვაკუთხედის აგება.

სავარჯიშო 2.20: შეადგინეთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეიძლება წესიერი ხუთკუთხედის აგება.

შენიშვნა: ზემოთ მოყვანილი ამოცანებისათვის არ არსებობს ალგორითმი, რომელიც მხოლოდ ფარგლითა და სახაზავით აგვაგებინებდა საჭირო წერტილებსა და ფიგურებს. ეს კი იმას არ ნიშნავს, რომ არ არსებობს სხვა რაიმე მეთოდი (თუ არ შევიზღუდებით მხოლოდ ფარგლითა და სახაზავით), რითაც ამ ამოცანებს გადავჭრით.

ღია ამოცანა: წესიერი მრავალკუთხედის ზემოთ მოყვანილ ფორმულაში $2^{2^q} + 1$ ე.წ. ფერმას მარტივი რიცხვია. დიდ ხანს ეგონათ, რომ ეს ფორმულა მხოლოდ მარტივ რიცხვებს იძლეოდა, მაგრამ აღმოჩნდა, რომ ეს ასე არაა. უფრო მეტიც: ეს ფორმულა ძირითადად შედგენილ რიცხვებს იძლევა. მაგრამ მნიშვნელოვანია შემდეგი საკითხი: სასრულია თუ არა ფერმას მარტივ რიცხვთა სიმრავლე? ან, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეგვხვდება თუ არა მიმდევრობაში $(2^{2^q} + 1)_{q=0}^{\infty}$ უსასრულოდ ბევრი მარტივი რიცხვი? ამ შეკითხვაზე პასუხი ჯერ-ჯერობით უცნობია.