5 მიმართებები და დალაგება

განვიხილოთ საქართველოს მოქალაქეთა სიმრავლე $A = \{w\,|\,w$ საქართველოს მოქალაქეა$\}$. რა თქმა უნდა, ამ სიმრავლეში ისეთი ადამიანების ქვესიმრავლეები იქნება, რომლებიც ერთმანეთთან მეგობრობენ. თუ $a, b \in A$ და a მეგობრობს b-თან, მაშინ b მეგობრობს a-თან. იმის აღსანიშნავად, რომ a და b მეგობრობენ, შეგვიძლია დავწეროთ: (a, b). თუ ჩამოვწერთ ყველა ასეთი მეგობრების წყვილებს, მივიღებთ რაღაცა სიმრავლეს $R = \{(a, b)\,|\,a, b \in A,$ a და b ერთმანეთთან მეგობრობენ$\}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$.

ახლა კი განვიხილოთ იგივე სიმრავლე A და მასზე განსაზღვრული მიმართება $R_1 = \{(a, b)\,|\,a, b \in A,$ b არის a-ს წინაპარი$\}$. ცხადია, რომ თუ $(a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \notin R_1$.

თუ მოცემულია ნებისმიერი ორი სიმრავლე A და B, მაშინ $A \times B = \{(a, b)\,|\,a \in A, b \in B\}$ A და B სიმრავლეების **„დეკარტული ნამრავლი"** ეწოდება.

მაგალითად, თუ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ და $B = \{a, b, c\}$, მაშინ

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}.$$

აღსანიშნავია, რომ აქ მნიშვნელობა აქვს ელემენტების თანმიმდევრობას: პირველ ადგილზეა A სიმრავლის ელემენტი, ხოლო მეორეზე კი - B სიმრავლისა.

ცხადია, რომ $A \times A$ სიმრავლეც A სიმრავლის თავის თავთან დეკარტული ნამრავლია.

მაგალითად, თუ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $A\times A = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)\}$.

სავარჯიშო 5.1: განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: მოცემულია $n \in \mathbb{N}$. შეადგინეთ $A \times A$, სადაც $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. რა არის ამ ამოცანის მონაცემი? რა უნდა იყოს მისი შედეგი? დაწერეთ ალგორითმი, რომელიც ამ ამოცანას გადაჭრის.

თუ მოცემულია რაიმე სიმრავლე A, მაშინ $R \subset A \times A$ მასზე განსაზღვრული მიმართება ეწოდება.
მაგალითად, ზემოთ განსაზღვრული R (მეგობრობის აღმნიშვნელი) და R_1 (წინაპრების აღმნიშვნელი) სიმრავლეები შესაბამისი A სიმრავლის სხვადასხვა დამოკიდებულებების განმსაზღვრელია.

ორ სხვადასხვა სიმრავლეზე განსაზღვრული მიმართების მაგალითიად შეგვიძლია მოვიყვანოთ საქართველოს რეგიონებისა და ქალაქების სიმრავლეები:
$A = \{$ქართლი, კახეთი, რაჭა, იმერეთი, სამეგრელო$\}$ და $B = \{$ოზურგეთი, ონი, ფოთი, აგარა, ზუგდიდი, ვანი, თელავი, გურჯაანი, ქუთაისი$\}$.
მიართება, რომელიც თითოეულ რეგიონს მასში არსებულ ქალაქს დაუკავშირებს, იქნება:

$$\begin{aligned} R_2 \ = \{ \quad & (\text{ქართლი, აგარა}), (\text{კახეთი, თელავი}), (\text{კახეთი, გურჯაანი}), (\text{რაჭა, ონი}), (\text{იმერეთი, ვანი}), \\ & (\text{იმერეთი, ქუთაისი}), (\text{სამეგრელო, ფოთი}), (\text{სამეგრელო, ზუგდიდი}) \ \}. \end{aligned}$$

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი განსაზღვრება:

ნებისმიერი A და B სიმრავლისათვის $R \subset A \times B$ ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული მიმართებაა (არაა გამორიცხული, რომ $A = B$).

- თუ $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, $(a_1, a_2) \in R$ ან $(a_2, a_1) \in R$, მაშინ R მიმართებას სრული ეწოდება;
- თუ $\forall a \in A$, $(a, a) \in R \subset A \times A$, მაშინ R მიმართებას რეფლექსური ეწოდება;
- თუ $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, $(a_1, a_2) \in R \Leftrightarrow (a_2, a_1) \in R$, მაშინ R მიმართებას სიმეტრიული ეწოდება;
- თუ $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, $(a_1, a_2) \in R \Rightarrow (a_2, a_1) \notin R$, მაშინ R მიმართებას ანტისიმეტრიული ეწოდება;
- თუ $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$, $a_1 \neq a_2$, $a_3 \neq a_2$, $(\,(a_1, a_2) \in R, (a_2, a_3) \in R\,) \Rightarrow (a_1, a_3) \in R$, მაშინ R მიმართებას ტრანზიტული ეწოდება.

მაგალითად, ზემოთ განსაზღვრული R (მეგობრობის აღმნიშვნელი) მიმართება სიმეტრიულია, მაგრამ არ არის სრული, რადგან შეიძლება მოიძებნოს ორი ისეთი ადამიანი $a, b \in A$, რომელიც ერთმანეთთან არ მეგობრობს და ამიტომ $(a, b) \notin R$.

მეორე მიმართება R_1 (წინაპრების განმსაზღვრელი) ტრანზიტულია: თუ a-ს წინაპარია b ($(a, b) \in R_1$) და b-ს წინაპარია c ($(b, c) \in R_1$), a-ს წინაპარია c ანუ $(a, c) \in R_1$.

მესამე მიმართება R_2 ანტისიმეტრიული და არასრულია: R_2 არ შეიცავს არც ერთ წყვილს, რომელშიც შედის ოზურგეთი.

სავარჯიშო 5.2: დაამტკიცეთ, რომ მიმართება $R_3 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R_3 = \{(a, b) | a \leq b\}$ რეფლექსური და სრულია.

სავარჯიშო 5.3: დაწერეთ, რისი ტოლია შემდეგი სიმრავლეები:

(ა) $\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$;

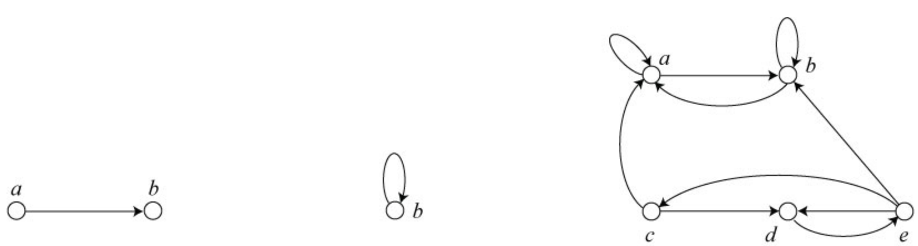
(ბ) $\emptyset \times \{1, 2, 3\}$;

(გ) $2^{\{1,2\}}$, რაც არის $\{1, 2\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლის სიმრავლე;

(დ) $2^{\{1,2\}} \times \{1, 2\}$.

თვალსაჩინოებისათვის პატარა სიმრავლეებზე მიმართებები გრაფიკულად შეიძლება გამოვსახოთ: თუ A სიმრავლეზე განსაზღვრულია რაიმე მიმართება R და $(a, b) \in R$, მაშინ a და b ელემენტები გამოისახება რგოლებად, ხოლო $(a, b) \in R$ კი a ელემენტიდან b ელემენტში მიმართული ისრით (ნახ. 27 (ა)). თუ $(b, b) \in R$, ეს გრაფიკულად b ელემენტის შესაბამისი რგოლიდან გამომავალი და იგივე რგოლში შემავალი ისრით გამოიხატება (ნახ. 27 (ბ)).

თუ $A = \{a, b, c, d, e\}$, მაშინ $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)(c, a), (c, d), (d, e), (e, b), (e, c), (e, d)\}$ ისე შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ნახ. 27 (გ)) -ში.



(ა) (ბ) (გ)

ნახ. 27: მიმართებათა გრაფიკული წარმოდგენა

რეფლექსურ, სიმეტრიულ და ტრანზიტულ მიმართებას „ტოლობის მიმართება" ან „ექვივალენტურობის მიმართება" ეწოდება.

მაგალითად, თუ მოცემულია მსოფლიოს ხალხთა სიმრავლე A, მაშინ $R' = \{(a, b) | a \text{ და } b \text{ ერთი ეროვნების არიან}\}$ ექვივალენტურობის მიმართებაა, რადგან იგი რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტულია.

სავარჯიშო 5.4: დაამტკიცეთ, რომ ზემოთ მოყვანილი მიმართება R' მართლაც რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტულია.

ექვივალენტურობის მიმართება სიმრავლეს ე.წ. „ექვივალენტურობის კლასებად" ჰყოფს, ანუ ისეთ ქვესიმრავლეებად, სადაც ერთმანეთის ექვივალენტური (ანუ გარკვეული თვალსაზრისით მსგავსი) ელემენტები შედის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ რაიმე $A \neq \emptyset$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ექვივალენტურობის მიმართება R, იგი განსაზღვრავს A სიმრავლის ისეთ ქვესიმრავლეებს $B \subset A$, რომ $B = \{a, b \in A \,|\, (a, b) \in R\}$ (ამ ქვესიმრავლეებში მხოლოდ ისეთი ელემენტები შედის, რომლებიც R მიმართების განსაზღვრებით ერთმანეთის „ექვივალენტურია").

მაგალითად, თუ მოცემულია მიმართება $R = \{(a,b)|\, a$ და b ორივე ლუწია ან a და b ორივე კენტია$\}$, იგი ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლეში ორ ქვესიმრავლეს გამოჰყოფს - ლუწ და კენტ რიცხვთა ქვესიმრავლეებს (კლასებს): $N_1 = \{a_i|(a_k, a_l) \in R$ და ორივე ლუწია$\}$, $N_2 = \{a_i|(a_k, a_l) \in R$ და ორივე კენტია$\}$

თუ მოცემულია $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, მაშინ მიმართება $R = \{(a,b) \in A \times A \,|\, a$ და b ორივე ლუწია ან a და b ორივე კენტია$\}$ გრაფიკულად შემდეგნაირად შეიძლება გამოისახოს:

ნახ. 28: სიმრავლის ორ დამოუკიდებელ კლასად დაყოფის მაგალითი

ადვილი დასანახია, რომ R მიმართება A სიმრავლეში ორ დამოუკიდებელ კლასს (ქვესიმრავლეს) გამოჰყოფს.

აღსანიშნავია, რომ ეს ერთმანეთის ექვივალენტური ანუ ტოლი ელემენტები მოცემული მიმართებითაა განსაზღვრული. სხვა მიმართებას შეიძლება სხვა ექვივალენტური ელემენტები გამოეყო. ამის მაგალითია იგივე A სიმრავლეზე განსაზღვრული $R' = \{(a,b) \,|\, a$ და b ორივე იყოფა 3-ზე ან a და b ორივე არ იყოფა 3-ზე$\}$.

სავარჯიშო 5.5: გრაფიკულად გამოხატეთ ბოლოს მოცემული მიმართება R' ისე, როგორც ეს წინა მაგალითში მოხდა.

რაიმე A სიმრავლის **ექვივალენტურობის კლასები** შემდეგნაირად აღინიშნება: $[a] = \{b \,|\, (a,b) \in R\}$, სადაც R არის A სიმრავლის ექვივალენტურობის მიმართება.
მაგალითად, თუ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ და $R' = \{(a,b) \,|\, a$ და b ორივე იყოფა 3-ზე ან a და b ორივე არ იყოფა 3-ზე$\}$, $[6] = \{0, 3, 6, 9\}$ და $[2] = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

სავარჯიშო 5.6: მოიყვანეთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ექვივალენტურობის მიმართების მაგალითი, რომელიც სამ ქვესიმრავლეს გამოჰყოფს. თითოეულ ასეთ კლასში ერთმანეთის ექვივალენტური ელემენტებია.

ახლა კი განვიხილოთ ორი ნატურალური რიცხვი, რომელიც ათობით ანბანშია ჩაწერილი: 307 და 509. ჩვენ ვიცით, რომ $307 < 509$. ამ ორი რიცხვის ასეთი მიმართება სადღაც უნდა იყოს განსაზღვრული (ანალოგიურად ჩვენ შეგვეძლო განგვესაზღვრა $509 < 307$. ჩვენ ვიცით, რომ $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$. მაგრამ ამ ციფრების ასეთი მიმართება ცხადი არაა, ესეც ვიღაცის მიერაა დადგენილი და შემდეგ საყოველთაოდ მიღებული.
ამრიგად, გვაქვს შემდეგი მიმართება $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ სიმრავლეზე:

$$
\begin{aligned}
R \;=\{ & \\
& (0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),(0,7),(0,8),(0,9)\\
& (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9)\\
& (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(2,9)\\
& (3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9)\\
& (4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9)\\
& (5,6),(5,7),(5,8),(5,9)\\
& (6,7),(6,8),(6,9)\\
& (7,8),(7,9)\\
& (8,9)\\
\}&
\end{aligned}
$$

ეს მიმართება ე.წ. „დალაგებას" განსაზღვრავს, ანუ გვაძლევს იმის წესს, თუ როგორ შეიძლება დავალაგოთ სიმრავლის ელემენტები ზრდადობის მიხედვით.

განმარტება 5.1: სრულ, ანტისიმეტრიულ და ტრანზიტულ მიმართებას დალაგება ეწოდება. არასრულ, ანტისიმეტრიულ და ტრანზიტულ მიმართებას ნაწილობრივი დალაგება ეწოდება.

სავარჯიშო 5.7: დაამტკიცეთ, რომ ბოლოს მოყვანილი მიმართება R დალაგებაა.

სავარჯიშო 5.8: მოიყვანეთ ზემოთ განსაზღვრულ A სიმრავლეზე ნაწილობრივი დალაგების მაგალითი.

თუ $(a,b) \in R$ და R დალაგებაა, მაშინ ვწერთ: $a < b$.

თუ გვაქვს მოცემული დალაგება ზემოთ მოყვანილ ანბანზე A, ადვილად შეიძლება A^* სიმრავლის სიტყვების დალაგებაც შემდეგი ალგორითმით:

ალგორითმი $C(w,v)$

მოცემულია: $w = (w_1, w_2, ..., w_n), v = (v_1, v_2, ..., v_m) \in A^*$

- თუ $|w| = |v| = 0$, მაშინ $w = v$ და ალგორითმი დაასრულე.
- თუ $w(1) < v(1)$, მაშინ $(w,v) \in R$ (ან, რაც იგივეა, $w < v$) და ალგორითმი დაასრულე.
- თუ $v(1) < w(1)$, მაშინ $(v,w) \in R$ (ან, რაც იგივეა, $v < w$) და ალგორითმი დაასრულე.
- ჩაატარე $C(w\{|w|-1\}, v\{|v|-1\})$ (იგივე ალგორითმი w და v სიტყვების სუფიქსებისათვის).

აუცილებლად გასათვალისცინებელია, რომ $\epsilon < a, \forall a \neq \epsilon \in A$.

სავარჯიშო 5.9: სიტყვიერად ახსენით, თუ რას ნიშნავს ზედა ალგორითმში მოყვანილი მათემატიკური ჩანაწერები „თუ $w(|w|) < v(|v|)$, მაშინ..." და „$C(w\{|w|-1\}, v\{|v|-1\})$".

სავარჯიშო 5.10: დაამტკიცეთ ამ ალგორითმის სისწორე. გამოითვალეთ მისი ბიჯების რაოდენობა, თუ $|w| = |v|$ და შემდეგ თუ $|w| \neq |v|$.

სავარჯიშო 5.11: დაწერეთ, თუ რისი ტოლია ზემოთ მოყვანილ A სიმრავლეზე განსაზღვრული დალაგების სიმრავლე, რომლის მიხედვითაც $1 \leq 3 \leq 2 \leq 5 \leq 8 \leq 4 \leq 0 \leq 9 \leq 7 \leq 6$.

სავარჯიშო 5.12: მოიყვანეთ A სიმრავლეზე განსაზღვრული ორი სხვადასხვა ნაწილობრივი დალაგების მაგალითი. არის თუ არა $R = \emptyset$ ამ სიმრავლის ნაწილობრივი დალაგება?

სავარჯიშო 5.13: დაამტკიცეთ, რომ თუ R_1 და R_2 რაღაცა სიმრავლეზე განსაზღვრული ნაწილობრივი დალაგებებია, მაშინ $R_1 \cap R_2$ იგივე სიმრავლეზე განსაზღვრული ნაწილობრივი დალაგებაა.

სავარჯიშო 5.14: მოცემულია ნებისმიერი სიმრავლე S, რომელიც თავის მხრივ რაღაცა სიმრავლეებისაგან შედგება. დაამტკიცეთ, რომ $R_S = \{(A,B) \,|\, A, B \in S, A \subseteq B\}$ ნაწილობრივი დალაგებაა.

სავარჯიშო 5.15: დავუშვათ, $S = 2^{\{1,2,3\}}$, რაც არის $\{1,2,3\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლის სიმრავლე. ამოწერეთ ამ სიმრავლის ყველა ელემენტი და დიაგრამის სახით გამოსახეთ წინა სავარჯიშოში განსაზღვრული მიმართება R_S, რომელიც ამ სიმრავლეზეა განსაზღვრული. ცალკე ამოწერეთ S სიმრავლის მინიმალური ელემენტები, ანუ ისეთი ელემენტები a_i, რომელთათვისაც $(a_i, b) \in R_S, \forall b \in S$.

სავარჯიშო 5.16: როგორ განისაზღვრება ნებისმიერი A სიმრავლის რაღაცა R დალაგების შედეგად მიღებული მაქსიმალური ელემენტები?

დალაგება და ნაწილობრივი დალაგება ცენტრალურ როლს თამაშობს ინფორმატიკაში, რადგან ამოცანათა უდიდესი ნაწილი მონაცემთა რაღაცა წესის მიხედვით დალაგების შედეგად საკმაოდ მარტივდება.

ამის მაგალითია ქართულ ანბანზე Q შემოტანილი დალაგება ა < ბ < გ < დ < $\cdots$ < ჯ < ჰ. თუ ჩვენ ამის საფუძველზე ქართულ სიტყვებსაც დავალაგებთ (ანუ შემოვიტანთ დალაგების წესს Q^* სიმრავლეზე), ქართულ ლექსიკონში რაიმე მოცემული w სიტყვის მოძებნა გაადვილდება: ლექსიკონს გადავშლით შუაში და ამოვიკითხავთ პირველივე სიტყვას v. თუ $w = v$, სიტყვა მოძებნილია. თუ ჩვენი საძებნი სიტყვა ამ სიტყვის წინაა (ანუ

$w < v$), მაშინ იგივე ოპერაციას გავიმეორებთ ლექსიკონის პირველ ნახევარში (თუ $v < w$, ვიღებთ მეორე ნაწილს): გადავშლით ამ ნაწილის შუაში და ანალოგიურ პროცედურას გავიმეორებთ.

სავარჯიშო 5.17: დაწერეთ ალგორითმი, რომელიც ქართულ ანბანზე განსაზღვრული ორი სიტყვისათვის w და v განსაზღვრავს, $w = v$ თუ $w < v$ თუ $v < w$.
შენიშვნა: ეს ალგორითმი ათობითში ჩაწერილი რიცხვების შედარების ალგორითმის მსგავსია.

სავარჯიშო 5.18: დაამტკიცეთ წინა სავარჯიშოში მოყვანილი ალგორითმის სისწორე და გამოითვალეთ მისი ბიჯების რაოდენობა, თუ $|w| = n$ და $|v| = m$.

ზოგადად, თუ მოცემულია რაიმე A ანბანი და $S = \{u_1, u_2, ..., u_n \in A^*\}$ სიტყვათა დალაგებული სიმრავლე, მოცემული w სიტყვის მოძებნა ამ სიმრავლეში შეიძლება შემდეგი ალგორითმით:

ალგორითმი $L(S, w)$

მოცემულია: $S = \{u_1, u_2, ..., u_n \in A^*\}$ სიტყვათა სიმრავლე და რაღაცა სიტყვა w.

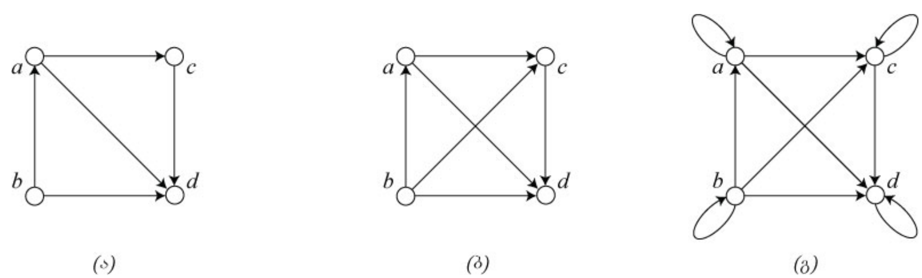
შედეგი: ვიპოვნოთ ისეთი $u_i \in S$, რომ $u_i = w$.

- თუ $S = \emptyset$, მაშინ დაბეჭდე: „სიტყვა სიმრავლეში არ მოიძებნა" და ალგორითმი დაასრულე.
- თუ $u_{\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor} = w$, მაშინ დაბეჭდე: „$i$-ური ელემენტია w" და ალგორითმი დაასრულე.
- $u_{\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor} < w$, მაშინ ჩაატარე $L(\{u_{\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor + 1}, ..., u_n\}, w)$.
- $u_{\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor} > w$, მაშინ ჩაატარე $L(\{u_{\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor}, ..., u_1\}, w)$.

სავარჯიშო 5.19: ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ ამ ალგორითმის სისწორე. გამოითვალეთ მისი ბიჯების რაოდენობა, თუ $|S| = n$.

ახლა კი განვიხილოთ ნახ. 29 (ა) -ში მოყვანილი მიმართება. ადვილი საჩვენებელია, რომ იგი არც რეფლექსური და არც ტრანზიტულია.

სავარჯიშო 5.20: აჩვენეთ, რომ ნახ. 29 (ა) -ში მოყვანილი მიმართება არც რეფლექსური და არც ტრანზიტულია.



ნახ. 29: მიმართების რეფლექსური და ტრანზიტული ჩაკეტვა

ამ მიმართების სიმრავლისათვის რამოდენიმე ახალი წყვილის (ან გრაფიკულად ისრის) ჩამატებით შეიძლება მივიღოთ ტრანზიტული მიმართება (ნახ. 29 (ბ). დამატებით ყველა a ელემენტისათვის (a, a) წყვილის დამატებით კი ეს მიმართება რეფლექსურიც ხდება (ნახ. 29 (გ)).

ანალოგიური პროცედურა - დამატებითი წყვილებით გაფართოვება ისე, რომ ნებისმიერი მიმართება ტრანზიტული და რეფლექსური გახდეს, შეიძლება ნებისმიერ მიმართებაზე ჩავატაროთ. მიღებულ მიმართებას საწყისი მიმართების რეფლექსური და ტრანზიტული ჩაკეტვა ეწოდება.

განმარტება 5.2: ნებისმიერი R მიმართების ტრანზიტული და რეფლექსური ჩაკეტვა R^* ეწოდება ისეთ რეფლექსურ და ტრანზიტულ მიმართებას, რომლისთვისაც $R \subset R^*$ და R^* სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა მინიმალურია

იმ სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობათა შორის, რომლებიც R მიმართებას ქვესიმრავლედ შეიცავენ, ანუ R^* სიმრავლე R სიმრავლიდან რაც შეიძლება ცოტა წყვილის დამატებით უნდა მიიღებოდეს.

სავარჯიშო 5.21: დაწერეთ ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი A სასრული სიმრავლის რაიმე R მიმართებისათვის მის რეფლექსურ და ტრანზიტულ ჩაკეტვას გამოიანგარიშებს (ანუ შეადგენს შესაბამის სიმრავლეს). დაამტკიცეთ მისი სისწორე და გამოიანგარიშეთ ბიჯების რაოდენობა, თუ $|A| = n$.