1.2 ამოცანათა რეკურსიული აღწერა

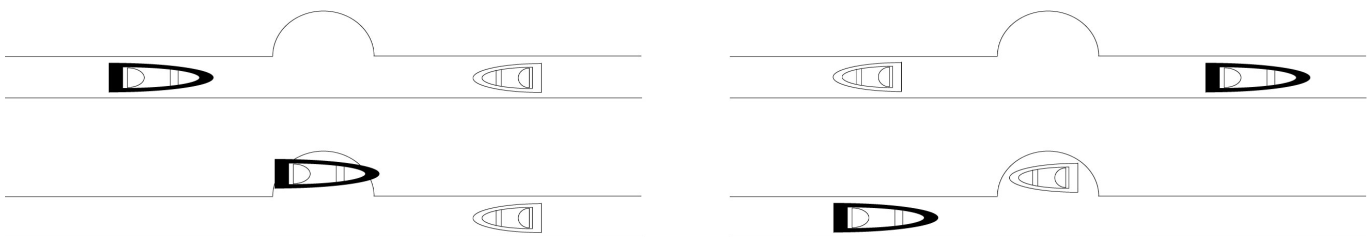
1.2.1 ამოცანა ნავების შესახებ

მოცემულია: ვიწრო მდინარე პატარა ყურეთი. მდინარეში ყურეს მარცხნივ გრძელი შავი ნავი და მარჯვნივ - მოკლე თეთრი ნავი.

შედეგი: მდინარეში ყურეს მარცხნივ მოკლე თეთრი ნავი და მარჯვნივ - გრძელი შავი ნავი (ნავებმა ერთმანეთს გვერდი უნდა აუქციონ).

შეზღუდვა: მდინარე იმდენად ვიწროა, რომ სიგანეში მხოლოდ ერთი ნავი ეტევა. ყურეში ეტევა მხოლოდ თეთრი ნავი. შავი ნავი ყურეში არ ეტევა.

ნახ. 6-ში გრაფიკულადაა ნაჩვენებია ამოცანის მონაცემი, შედეგი და შეზღუდვები.



ნახ. 6:

იმისათვის, რომ ერთმა თეტლმა ნავმა შავს გვერდი აუქციოს, საჭიროა შემდეგი ალგორითმის ჩატარება:

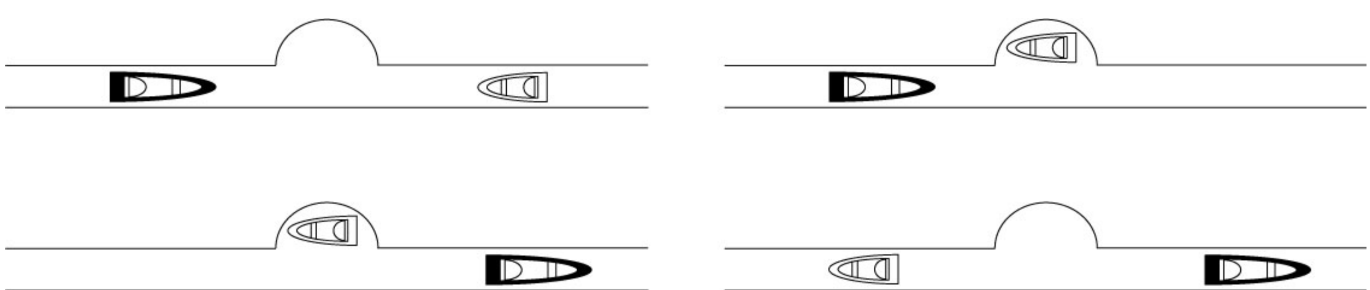
ალგორითმი „ერთი ნავის გაყვანა"

მონაცემები:
ვიწრო მდინარე პატარა ყურეთი, ყურეს მარცხნივ გრძელი შავი ნავი და მარჯვნივ - მოკლე თეთრი ნავი.

1. თეთრი ნავი შევიდეს ყურეში;
2. შავმა ნავმე გაიაროს;
3. თეთრი ნავი გამოვიდეს ყურედან.

ალგორითმი დასრულებულია

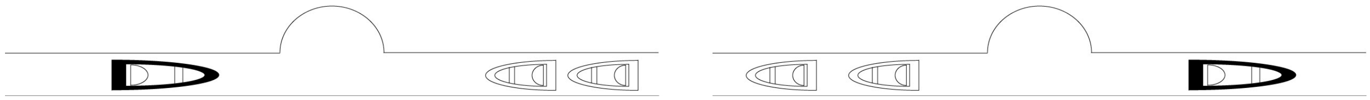
ადვილი საჩვენებელია, რომ ეს ალგორითმი ამოცანის საბოლოო შედეგს მოგვცემს და მისი არც ერთი ბიჯი ამოცანის შეზღუდვებს არ ეწინააღმდეგება (ნახ. 7).



ნახ. 7:

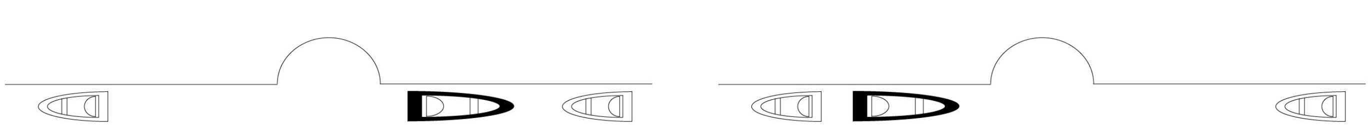
ზემოთ მოყვანილი ალგორითმი აღვნიშნოთ როგორც A_1. ესე იგი, თუ ვიტყვით, რომ ზემოთ მოყვანილ საწყის პირობაზე ჩატარებულია ალგორითმი A_1, შედეგად ვიღებთ ზემოთვე მოყვანილ საბოლოო შედეგს.

ახლა კი განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც ყურეს მარჯვნივ არა ერთი, არამედ ორი ნავია განთავსებული. ნახ. 6-ში გრაფიკულადაა ნაჩვენებია ამ ამოცანის მონაცემი და შედეგი. ამ ამოცანას ჩვენ ვუწოდებთ „ორი ნავი”.



ნახ. 8:

თუ პირველ რიგში ჩავატარებთ იგივე სამ ბიჯს, რაც ალგორითმში A_1, მივიღებთ ისეთ სიტუაციას, როგორიც ნაჩვენებია ნახ. 9-ში (მარცხნივ). შემდეგ, თუ შავი ნავი წავა უკან ყურეს მარცხნივ, შეიქმნება ისეთივე სიტუაცია, როგორც წინა ამოცანაში (ნახ. 9 მარჯვნივ)



ნახ. 9:

შავი ნავის უკან გასვლის პროცესი აღვნიშნოთ როგორც U. ესე იგი, თუ საწყისი მდგომარეობაა ისეთი, როგორც ნახ. 8-ში მარცხნივ და ჯერ ჩავატარებთ ალგორითმს A_1, მივიღებთ ისეთ ვითარებას, როგორც ნახ. 9-ში მარცხნივ. თუ შემდეგ კიდევ ჩავატარებთ ალგორითმს U, მივიღებთ ისეთ ვითარებას, როგორც ნახ. 9-ში მარჯვნივ. აღსანიშნავია, რომ ამ შემთხვევაში შეიქმნა ისეთივე ვითარება, როგორც ამოცანაში „ერთი ნავი”. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თუ გამოვიყენებთ ალგორითმს A_1, საბოლოო მდგომარეობას მივაღწევთ.

ასე რომ, ალგორითმი A_2, რომელიც ამოცანას „ორი ნავი” ხსნის, შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს: $A_2 = A_1, U, A_1$ (ჯერ ჩაატარე ალგორითმი A_1, შემდეგ ალგორითმი U და ბოლოს ისევ ალგორითმი A_1.

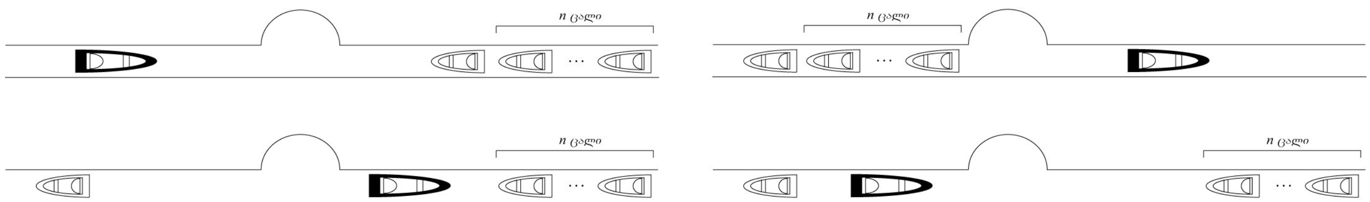
ახლა კი დავუშვათ, რომ ალგორითმი A_n n თეთრი ნავის გვერდის აქცევას ახერხებს (ნახ. 10). აქამდე ჩვენ განვიხილეთ, თუ როგორია A_n, თუ $n = 1$, ან $n = 2$.

ნახ. 10:

თუ განვიხილავთ $n+1$ ნავის გვერდის აქცევის ამოცანას ისეთი საწყისი და საბოლოო მდგომარეობებით, რომლებიც ნაჩვენებია ნახ. 11-ში (ზემოთ) და ჩავატარებთ ალგორითმებს A_1, U, მივიღებთ ისეთ სიტუაციას, რომელიც გვქონდა n ნავის გვერდის აქცევის ამოცანაში (ნახ. 11 ქვემოთ).

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ A_n ალგორითმის გამოყენების შემდეგ მიიღება საბოლოო მდგომარეობა (ნახ. 11 ზემოთ მარჯვნივ).

საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ჩანაწერს: $A_{n+1} = A_1, U, A_n$. თუ ვიცით, როგორია ალგორითმი A_1, ადვილი გამოსათვლელია ალგორითმი A_2 (აქ $n+1 = 2$ და $n = 1$): ჯერ ჩავატარებთ ალგორითმს A_1, შემდეგ U და შემდეგ ისევე A_1. A_3 ალგორითმის ჩასატარებლად ჯერ უნდა ჩავატაროთ A_1, შემდეგ U და შემდეგ A_2. ასე ნაბიჯ-ნაბიჯ



ნახ. 11:

შეიძლება გამოვითვალოთ A_n ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის: $A_n = A_1, U, A_{n-1} = A_1, U, A_1, U, A_{n-2} = A_1, U, A_1, U, A_1, U, A_{n-2} = A_1, U, A_1, U, \cdots, A_1$ (n-ჯერ).

სავარჯიშო 1.10: რისი ტოლია A_7? (მაგ.: $A_3 = A_1, U, A_2 = A_1, U, A_1, U, A_1$)

მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ალგორითმი A_n იყენებს „თავის თავს", მხოლოდ უფრო დაბალი პარამეტრით (მაგ. $A_2 = A_1, U, A_1$; $A_7 = A_1, U, A_6$ და ა.შ.)

იმ შემთხვევაში, როდესაც ალგორითმი თავის თავს იყენებს, მას „რეკურსიული" ეწოდება. ესე იგი, $A_n = A_1, U, A_{n-1}$ ალგორითმის ეს ჩანაწერი რეკურსიულია.

აღსანიშნავია ისიც, რომ ნებისმიერი რეკურსიული ალგორითმი შეიძლება არარეკურსიული სახითაც ჩაიწეროს (განიხილეთ წინა სავარჯიშოს მაგალითი).

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ამ ამოცანის სისწორე, უნდა გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი, რომელიც ხშირად გამოიყენება ალგორითმების თეორიაში და ძალიან მნიშვნელოვან როლსაც თამაშობს:

- რეკურსიის დასაწყისი: A_1 ალგორითმი სწორია (ამის გადამოწმება ადვილია);
- რეკურსიის დაშვება: დავუშვათ, A_n ალგორითმი სწორია რაღაცა n ნატურალური რიცხვისათვის (და მასზე პატარა ყველა რიცხვისათვის);
- რეკურსიის ბიჯი: დავამტკიცოთ, რომ $A_{n+1} = A_1, U, A_n$ სწორია.

თუ დავამტკიცებთ, რომ A_{n+1} ალგორითმი სწორია და გვეცოდინება, რომ A_1 სწორია, მაშინ დავუშვებთ, რომ $n = 1$ და ამით დამტკიცდება, რომ $A_{n+1} = A_2$ სწორია. თუ A_2 სწორია და დავამტკიცებთ, რომ A_{n+1} სწორია, დამტკიცდება, რომ A_3 სწორია და ა.შ. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის.

ახლა კი დავამტკიცოთ $A_{n+1} = A_1, U, A_n$ ალგორითმის სისწორე: A_1, U ალგორითმების შესრულების შემდეგ წარმოიშვება ზუსტად ისეთივე სიტუაცია, როგორც n ნავის გაყვანის ამოცანაში. ხოლო ინდუქციის დაშვების თანახმად A_n ალგორითმი n ნავის გაყვანის ამოცანას სწორად ხსნის. ასე რომ, A_1, U, A_n $n+1$ ნავის გაყვანის ამოცანას სწორად ხსნის.

Q.E.D.

სავარჯიშო 1.11: სწორად ამოხსნის თუ არა შემდეგი ალგორითმი $A_n = A_{n-1}, U, A_1$ n ნავის გაყვანის ამოცანას?

ალგორითმის სისწორის მტკიცების შემდეგ საჭიროა მისი სისწრაფის, ანუ ბიჯების რაოდენობის დადგენა. A ალგორითმის ბიჯების რაოდენობას შემდეგნაირად აღნიშნავენ: $T(A)$. ჩვენს შემთხვევაში გვექნება $T(A_n)$.

რადგან ჯერ უნდა შევასრულოთ ალგორითმი A_1, ამის შემდეგ ალგორითმი U და ბოლოს ალგორითმი A_{n-1}, მაშინ A_n ალგორითმის ბიჯების რაოდენობა იქნება: $T(A_n) = T(A_1) + T(U) + T(A_{n-1})$ (ჯერ იმდენი, რამდენიც საჭიროა A_1 ალგორითმისათვის, შემდეგ იმდენი, რამდენიც საჭიროა U ალგორითმისათვის და ბოლოს იმდენი, რამდენიც საჭიროა A_{n-1} ალგორითმისათვის).

ეს ფორმულაც ჩაწერილია რეკურსიული სახით, რადგან იგი თავის თავს იყენებს, მხოლოდ უფრო დაბალი პარამეტრებით. მაგრამ მისი ჩაწერა არარეკურსიული სახითაც შეიძლება:

ჩვენ ვიცით, რომ $T(A_1) = 3$ და $T(U) = 1$ (შესაბამისი ალგორითმების გადამოწმებით ამაში ადვილად ვრწმუნდებით). აქედან გამომდინარე, ვიღებთ:

$$T(A_n) = T(A_{n-1}) + 4.$$

თავის მხრივ, $T(A_{n-1}) = T(A_{n-2}) + 4$, $T(A_{n-2}) = T(A_{n-3}) + 4$ ...

აქედან გამომდინარე,

$$T(A_n) = T(A_{n-1}) + 1 \cdot 4 = T(A_{n-2}) + 2 \cdot 4 = T(A_{n-3}) + 3 \cdot 4 = \cdots = T(A_1) + (n-1) \cdot 4 = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4 \cdot n - 1.$$

სავარჯიშო 1.12: დაამტკიცეთ, რომ ამაზე უფრო სწრაფი ალგორითმი ვერ იარსებებს.

სავარჯიშო 1.13: განვიხილოთ კენტ რიცხვთა მიმდევრობა: $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$. მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ: $a_n = 2n - 1$.

სავარჯიშო 1.14: მათემატიკურ ინდუქციაზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ: თუ $a_1 = 1$ და $a_n = a_{n-1} + 2$ (კენტ რიცხვთა მიმდევრობა), მაშინ $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (პირველი n კენტი რიცხვის ჯამი) გამოითვლება ფორმულით:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2.$$

სავარჯიშო 1.15: მოცემულია რეკურსიული ფორმულა: $S_n = S_{n-1} + 1$, $S_1 = 1$.. გახსენით რეკურსია (ჩაწერეთ S_n არარეკურსიული სახით ისე, როგორც ეს ნავების ალგორითმის ბიჯების რაოდენობის გამოთვლისას გავაკეთეთ).

სავარჯიშო 1.16: მოცემულია რეკურსიული ფორმულა: $K_n = K_{n-1} + n$, $K_1 = 1$. გახსენით რეკურსია.

სავარჯიშო 1.17: მოცემულია რეკურსიული ფორმულა: $L_n = 2 \cdot L_{n-1} + 1$, $L_1 = 1$. გახსენით რეკურსია.

1.2.2 ჰანოის კოშკების ამოცანა

1883 წელს ფრანგმა მათემატიკოსმა ედუარდ ლუკასმა დასვა შემდეგი ამოცანა:

მოცემულია: სამი ძელი A, B, C. A ძელზე ჩამოცმულია სხვადასხვა ზომის n რგოლი ისე, რომ დიდ რგოლს უფრო პატარა ადევს -- შექმნილია პირამიდა (ნახ. 12 (ა)).

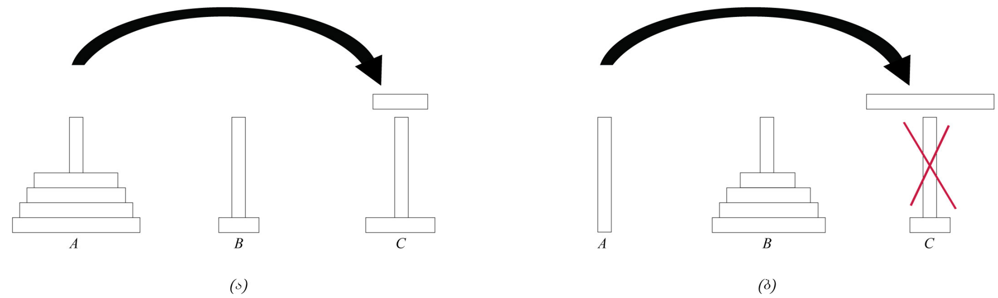
ნახ. 12: ჰანოის კოშკების ამოცანის საწყისი და საბოლოო მდგომარეობები

შედეგი: A ძელზე აგებული პირამიდა C ძელზე (ნახ. 12 (ბ)).

შეზღუდვა: თითო ჯერზე ერთი ძელიდან მეორეზე უნდა გადავიტანოთ ერთი და მხოლოდ ერთი რგოლი, რომელიც ყველაზე მაღლა დევს. ამავე დროს არ შეიძლება პატარა ზომის რგოლზე დიდი ზომის რგოლის დადება.

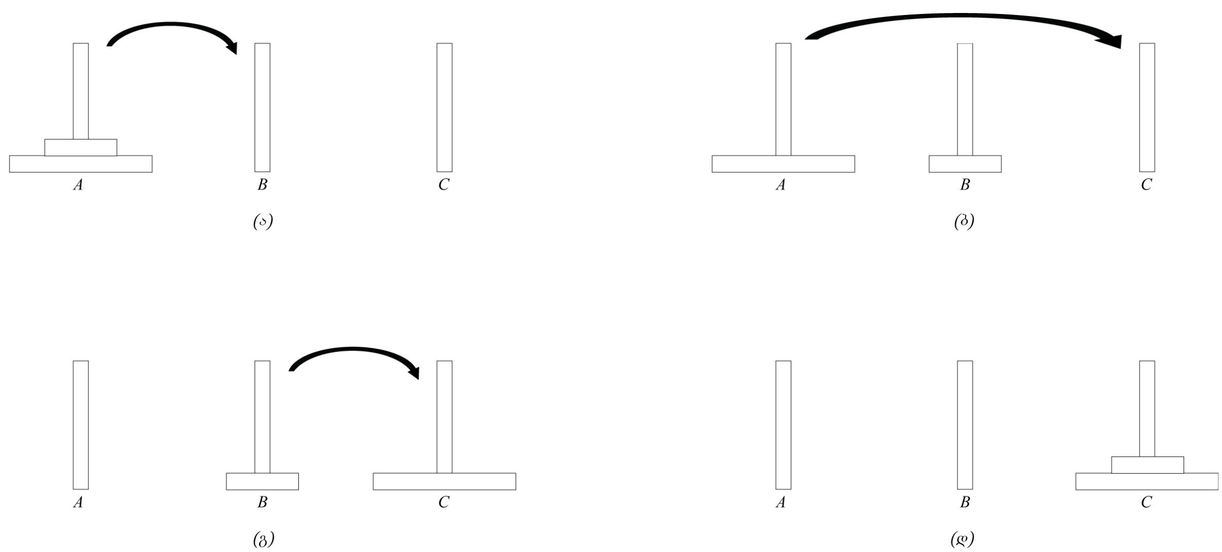
დავუშვათ, მოცემულია ერთ რგოლიანი პირამიდა. ცხადია, რომ მისი ერთი ძელიდან მეორეზე გადასატანად საკმარისია ერთი მოქმედება. თუ ეს ერთი რგოლი A ძელიდან C ძელზე გადაგვაქვს, ამ პროცედურას ვუწოდებთ $A_1^{A,C}$.

იმისათვის, რომ ორ რგოლიანი პირამიდა A ძელიდან C ძელზე გადავიტანოთ, საჭიროა შემდეგი მოქმედებების ჩატარება:



ნახ. 13: დასაშვები *(ა)* და აკრძალული *(ბ)* სვლები

1. A ძელიდან ზედა რგოლი გადაიტანე B ძელზე (ჩაატარე $A_1^{A,B}$, ნახ. 14 *(ბ)*);
2. A ძელიდან ზედა რგოლი გადაიტანე C ძელზე (ჩაატარე $A_1^{A,C}$, ნახ. 14 *(გ)*);
3. B ძელიდან ზედა რგოლი გადაიტანე C ძელზე (ჩაატარე $A_1^{B,C}$, ნახ. 14 *(დ)*).



ნახ. 14: ორ რგოლიანი პირამიდის გადატანისათვის საჭირო ოპერაციები

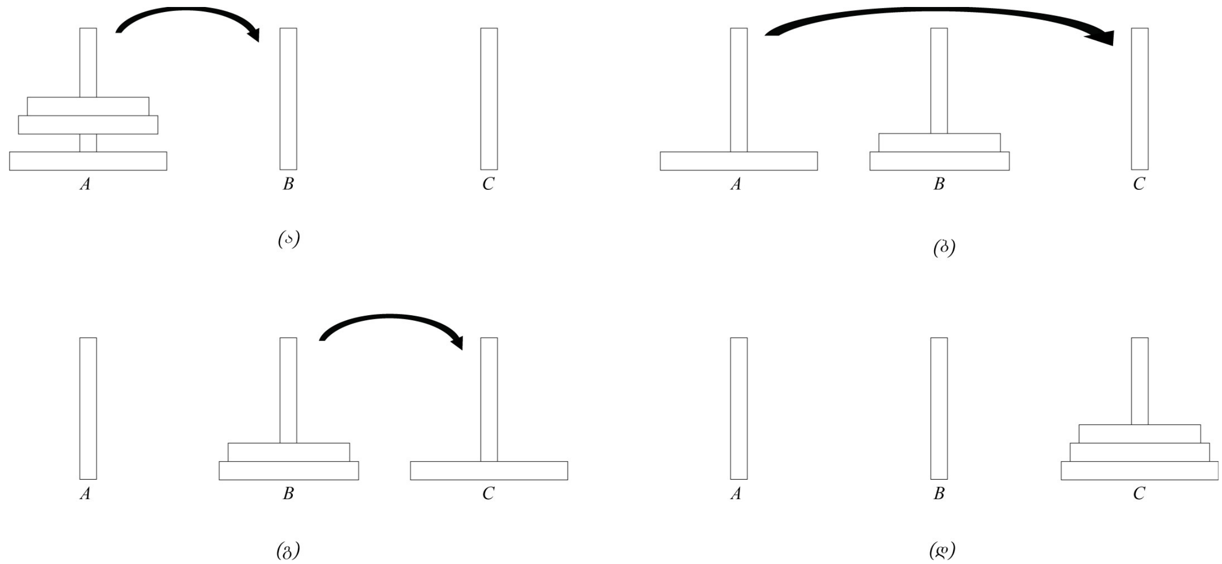
ორ რგოლიანი პირამიდის A ძელიდან C ძელზე გადატანის ალგორითმი (ანუ ზემოთ მოყვანილი სამ ბიჯიანი პროცესი) აღვნიშნოთ როგორც $A_2^{A,C}$.

ზოგადად, n რგოლის ერთი ძელიდან მეორეზე გადატანის ალგორითმი შემდეგნაირად შეიძლება აღინიშნოს: $A_n^{X_1,X_2}$. აქ $n \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2 \in \{A, B, C\}$ და $X_1 \neq X_2$. ამრიგად, $A_{13}^{C,A}$ ნიშნავს ალგორითმს, რომელიც C ძელზე აწყობილ 13 რგოლიან პირამიდას A ძელზე გადაიტანს, ხოლო $A_{108}^{B,A}$ კი იმ ალგორითმს, რომელიც B ძელზე აწყობილ 108 რგოლიან პირამიდას A ძელზე გადაიტანს.

თუ ვიცით, როგორ გადავიტანოთ ორ რგოლიანი პირამიდა ერთი ძელიდან მეორეზე, ადვილად შევადგენთ ალგორითმს $A_3^{A,C}$:

სამ რგოლიანი პირამიდა განვიხილოთ, როგორც ქვედა დიდ რგოლზე დადგმული ორ რგოლიანი პირამიდა (ნახ. 17 *(ა)*).

ამრიგად, $A_2^{A,B}$ ალგორითმით შეიძლება ზედა ორ რგოლიანი პირამიდის გადატანა B ძელზე (ნახ. 17 *(ბ)*), შემდეგ $A_1^{A,C}$ ალგორითმით ქვედა რგოლი გადაგვაქვს A ძელიდან C ძელზე (ნახ. 17 *(გ)*) და ბოლოს ისევე $A_2^{B,C}$ ალგორითმით ორ რგოლიანი პირამიდა გადაგვაქვს B ძელიდან C ძელზე (ნახ. 17 *(დ)*).



ნახ. 15: სამ რგოლიანი პირამიდის გადატანისათვის საჭირო ოპერაციები

ეს ალგორითმი რეკურსიულად შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს: $A_3^{A,B} = [A_2^{A,B}, A_1^{A,C}, A_2^{B,C}]$ (ჯერ შეასრულე $A_2^{A,B}$, შემდეგ $A_1^{A,C}$ და ამის შემდეგ $A_2^{B,C}$.

ალსანიშნავია, რომ $A_2^{A,B}$ და $A_2^{B,C}$ თვითონ რამოდენიმე ბიჯისაგან შედგება: $A_2^{A,B} = [A_1^{A,C}, A_1^{A,B}, A_2^{C,B}]$ და $A_2^{B,C} = [A_1^{B,A}, A_1^{B,C}, A_2^{A,C}]$.

სავარჯიშო 1.18: რეკურსიულად ჩაწერეთ $A_3^{B,C}$, $A_3^{C,A}$, $A_3^{A,B}$, $A_3^{B,A}$ და $A_3^{C,B}$ (იხ. ზემოთ მოყვანილი ანალოგიური ჩანაწერი $A_3^{A,C}$).

თუ ვიცით, როგორ გადავიტანოთ 3 რგოლიანი პირამიდა ერთი ძელიდან მეორეზე, რეკურსიულად შეიძლება $A_4^{X_1,X_2}$ ალგორითმის დადგენა. მაგ., $A_4^{A,C} = [A_3^{A,B}, A_1^{A,C}, A_3^{B,C}]$.

სავარჯიშო 1.19: რეკურსიულად ჩაწერეთ $A_4^{B,C}$, $A_4^{C,A}$, $A_4^{A,B}$, $A_4^{B,A}$ და $A_4^{C,B}$ (იხ. ზემოთ მოყვანილი ანალოგიური ჩანაწერი $A_3^{A,C}$).

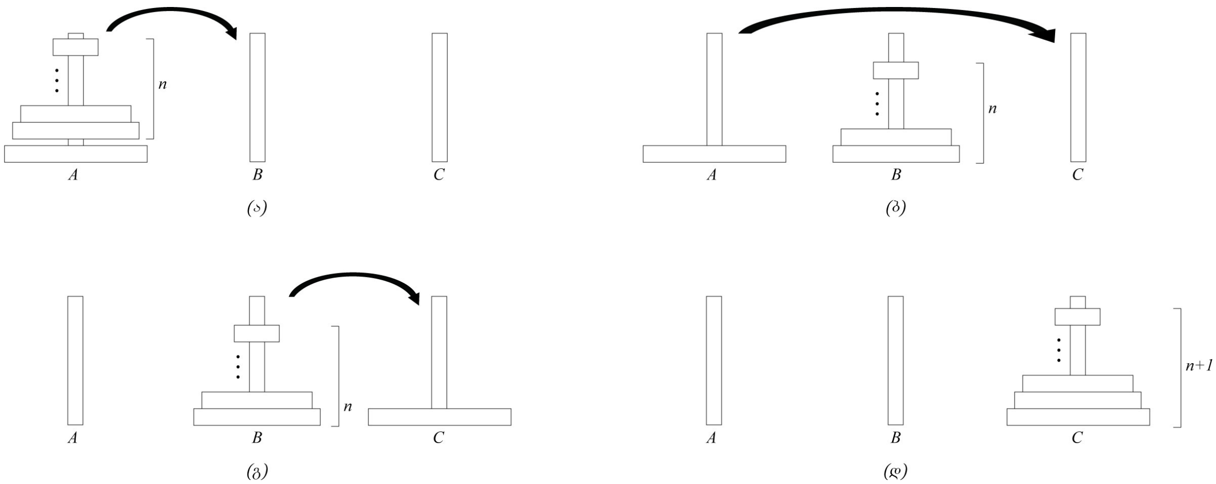
თუ ვიცით, როგორია n რგოლიანი პირამიდის ერთი ძელიდან მეორეზე გადატანის ალგორითმი $A_n^{X_1,X_2}$, ადვილად შევადგენთ $n+1$ რგოლიანი ალგორითმის გადატანის ალგორითმს $A_{n+1}^{X_1,X_2}$ (შესაბამისი მოქმედებები ნაჩვენებია ნახ. 16 -ში):

$$A_{n+1}^{X_1,X_2} = [A_n^{X_1,X_3}, A_1^{X_1,X_2}, A_n^{X_3,X_2}], \qquad X_1 \neq X_2 \neq X_3, \qquad X_1, X_2, X_3 \in \{A, B, C\}.$$

როგორც ყველა წინა მაგალითში, აქაც n ცალი რგოლის გადატანა ერთდროულადაა ნაჩვენები იმის და მიუხედავად, რომ $A_n^{X_1,X_2}$ რამოდენიმე ბიჯისაგან შედგება.

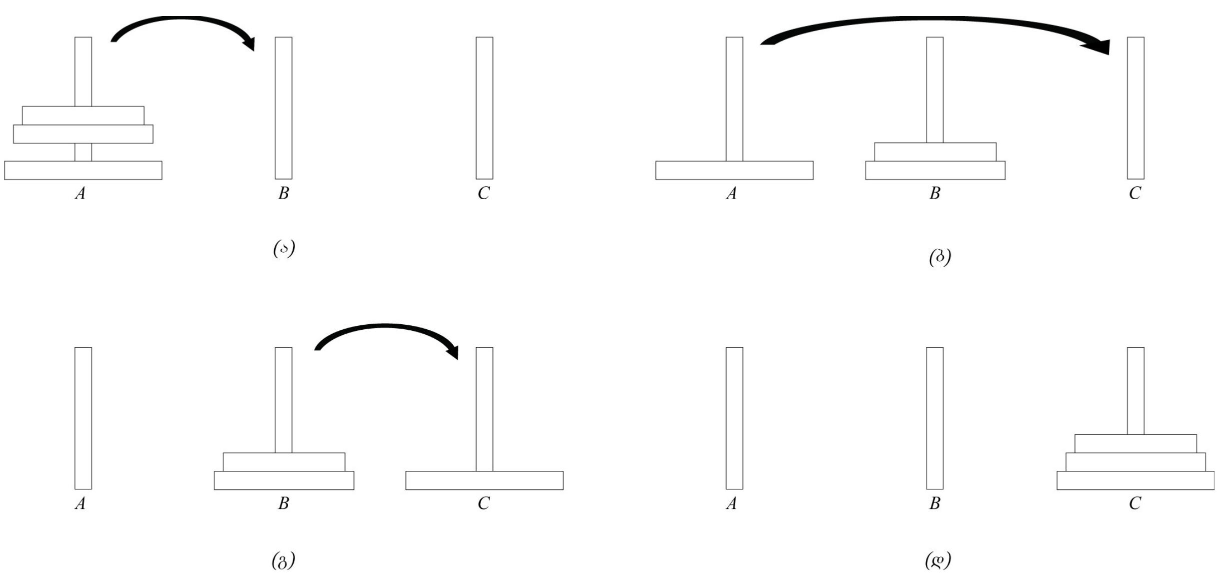
სავარჯიშო 1.20: რას აღნიშნავს შემდეგი ჩანაწერები: $A_7^{B,C}$, $A_{12}^{C,B}$, $A_4^{B,C}$?

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $A_1^{X_1,X_2}$ ალგორითმის შესრულებისას ამოცანის პირობა არ ირღვევა. თუ განვიხილავთ $A_2^{A,C}$ ალგორითმის რეკურსიულ ჩანაწერს, დავინახავთ, რომ პირველ რიგში უნდა შევასრულოთ ალგორითმი $A_1^{A,B}$. ადვილი სანახავია, რომ ამ ალგორითმის შესრულებისასაც პირობა არ ირღვევა. შემდეგ უნდა შევასრულოთ $A_1^{A,C}$. რადგან C ძელზე რგოლი არ დევს, მასზე A ძელიდან რგოლის გადატანა შესაძლებელია (პირობა არ დაირღვევა) და ჩ ძელზე ყველაზე დიდი რგოლი იდება. ბოლოს უნდა ჩავატაროთ $A_1^{B,C}$. ეს შესაძლებელია, რადგან C ძელზე ყველაზე დიდი რგოლი დევს.



ნახ. 16: $n + 1$ რგოლიანი პირამიდის გადატანისათვის საჭირო ოპერაციები

ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ თუ $A_3^{A,C}$ ალგორითმს ჩავწერთ ისე, როგორც ზემოთ განვიხილეთ და მას თანმიმდევრულად შევასრულებთ, ამოცანის პირობა არ ირღვევა: პირველ რიგში უნდა შესრულდეს $A_2^{A,B}$ (ნახ. 17 *(ა)*). ეს შესაძლებელია, რადგან B და C ძელები ცარიელია და A ძელზე ქვემოთ ყველაზე დიდი რგოლი დევს, რომელზეც პირობის თანახმად სხვა ნებისმიერი რგოლის დადება შეიძლება. ასე რომ, ამ ოპერაციების შესრულების დროს ამოცანის პირობა არ დაირღვევა. შედეგად მივიღებთ A ძელზე ერთ ყველაზე დიდ რგოლს და B ძელზე კი ორ რგოლიან პირამიდას (ნახ. 17 *(ბ)*). შემდეგ უნდა ჩავატაროთ $A_1^{A,C}$. ესეც არ არღვევს ამოცანის პირობას, რადგან ამ მომენტისათვის C ძელი ცარიელია. შედეგად მივიღებთ C ძელზე ერთ ყველაზე დიდ რგოლს და B ძელზე კი ორ რგოლიან პირამიდას, ხოლო A ძელი კი ცარიელი იქნება (ნახ. 17 *(გ)*). ბოლოს უნდა შევასრულოთ $A_2^{B,C}$. ესეც შესაძლებელია, რადგან A ძელი ცარიელია და C ძელზე ყველაზე დიდი რგოლი დევს, რომელზედაც ყველა დანარჩენი რგოლის დადება შეიძლება. ამ ოპერაციების ჩატარების შედეგად ამოცანის საბოლოო შედეგს მივიღებთ (ნახ. 17 *(დ)*).



ნახ. 17: სამ რგოლიანი პირამიდის გადატანისათვის საჭირო ოპერაციები

<u>სავარჯიშო 1.21:</u> დავუშვათ, მოცემულია შემდეგი ჩანაწერი: $A_3^{A,C} = [A_1^{A,B}, A_2^{A,C}, A_1^{B,C}]$. სიტყვიერად ახსენით, რა ოპერაციები უნდა შესრულდეს ამ ჩანაწერის შესაბამისად. ირღვევა თუ არა ამ ალგორითმის შესრულებისას ჰანოის კოშკების ამოცანის პირობა?

სავარჯიშო 1.22: მათემატიკურ ინდუქციაზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ $A_{n+1}^{A,C} = [A_n^{A,B}, A_1^{A,C}, A_n^{B,C}]$ ალგორითმის სისწორე.

სავარჯიშო 1.23: ზემოთ მოყვანილ მსჯელობაში, $A_3^{A,C}$ ალგორითმის სისწორის მტკიცებისას, რამოდენიმეჯერ აღვნიშნეთ, რომ ერთი ძელი ცარიელია (C ან A). რა საჭიროა ეს შენიშვნა სისწორის მტკიცებისას?

იმისათვის, რომ დავადგინოთ, თუ რამდენ ბიჯს ანდომებს ალგორითმი A_n, განვიხილოთ მისი რეკურსიული ჩანაწერი: $A_n^{A,C} = [A_{n-1}^{A,B}, A_1^{A,C}, A_{n-1}^{B,C}]$.

რაიმე K ალგორითმის ბიჯების რაოდენობა შემდეგნაირად აღიწერება: $T(K)$. ამრიგად, $T(A_n^{A,C})$ $A_n^{A,C}$) ალგორითმის ბიჯების რაოდენობაა.

სავარჯიშო 1.24: რას აღნიშნავს $T(A_{n+3}^{A,C}))$, $T(A_3^{C,B}))$, $T(A_7^{A,C}))$?

სავარჯიშო 1.25: რისი ტოლია $T(A_1^{A,C})$ და $T(A_2^{A,C})$?

სავარჯიშო 1.26: დაამტკიცეთ, რომ $T(A_1^{A,C}) = T(A_1^{B,C})$ და ზოგადად: $T(A_n^{X_1,X_2}) = T(A_n^{Y_1,Y_2})$ $\forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \{A, B, C\}$ და $X_1 \neq X_2$, $Y_1 \neq Y_2$ (არ აქვს მნიშვნელობა, რომელი ძელიდან რომელზე გადავაწყობთ პირამიდას - ბიჯების რაოდენობა უცვლელია).

რადგან $A_n^{A,C} = [A_{n-1}^{A,B}, A_1^{A,C}, A_{n-1}^{B,C}]$, ჯერ უნდა შესრულდეს $A_{n-1}^{A,B}$, შემდეგ $A_1^{A,C}$ და ბოლოს $A_{n-1}^{B,C}$. აქედან გამომდინარე,

$$T(A_n^{A,C}) = T(A_{n-1}^{A,B}) + T(A_1^{A,C}) + T(A_{n-1}^{B,C}) = 2 \cdot T(A_{n-1}^{A,B}) + 3$$

(იხ. წინა სავარჯიშოები).

სავარჯიშო 1.27: მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ:

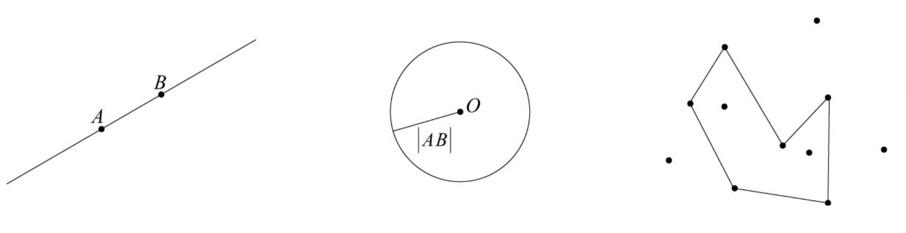
$$T(A_n^{A,C}) = 2^n - 1.$$

1.2.3 ძველი ბერძნული ამოცანები

ანტიკურ საბერძნეთში დასვეს ე.წ. „ფარგლითა და სახაზავით აგების" გეომეტრიული ამოცანები. აღსანიშნავია, რომ რამოდენიმე ამოცანა 2000 წელზე მეტ ხანს ამოუხსნელი რჩებოდა, სანამ XIX საუკუნეში მათემატიკურად არ დამტკიცდა, რომ მათი ალგორითმული გადაჭრა შეუძლებელია. ეს, ალბათ, ყველაზე ძველი ამოცანებია, რომელთაც ალგორითმული ამოხსნა არ აქვთ.

მოცემულია: ფარგალი, სახაზავი და ორი წერტილი სიბრტყეზე; რაიმე გეომეტრიული ფიგურა;
რაიმე ნამდვილი რიცხვი ξ.

შეზღუდვა: სახაზავით შეიძლება მოცემულ ორ წერტილზე A და B წრფის გავლება. თუ მოცემულია ნებისმიერი ორი წერტილი A, B და ნებისმიერი მესამე წერტილი O, ფარგლით შეიძლება O წერტილიდან $|A, B|$ სიგრძის რადიუსის მქონე წრეწირის შემოვლება (ნახ. 18).



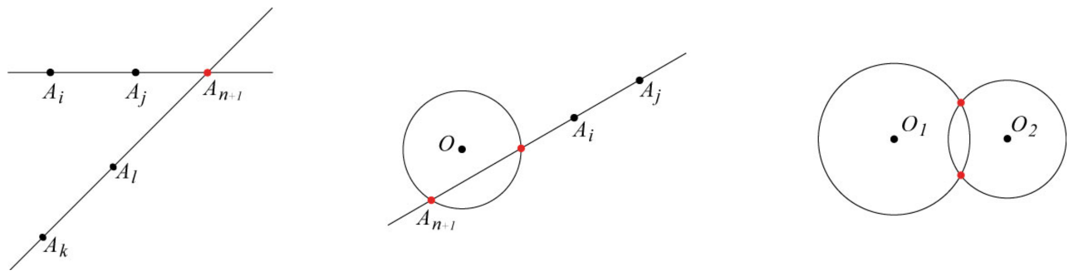
ნახ. 18: სახაზავით (მარცხნივ), ფარგლით (შუაში) და წერტილებზე აგებული ფიგურები

თუ მოცემულია უკვე აგებულ წერტილთა რაიმე სიმრავლე $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, ამ სიმრავლის რამოდენიმე წერტილზე გავლებულ შეკრულ ტეხილს ფარგლითა და სახაზავით აგებული ფიგურა ეწოდება.

ახალი A_{n+1} წერტილი ითვლება ფარგლითა და სახაზავით აგებულად, თუ:

- $\exists\ A_i, A_j, A_k, A_l \in \mathcal{S}$ და A_{n+1} არის A_i, A_j წერტილებზე გავლებული წრფისა და A_k, A_l წერტილებზე გავლე-ბული წრფის გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 19 მარცხნივ);
- $\exists\ A_i, A_j, A_k, A_l, O \in \mathcal{S}$ და A_{n+1} არის A_i, A_j წერტილებზე გავლებული წრფისა და O წერტილზე $|A_k, A_l|$ სიგრძის რადიუსის მქონე წრეწირის გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 19 შუაში);
- $\exists\ A_i, A_j, A_k, A_l, O_1, O_2 \in \mathcal{S}$ და A_{n+1} არის O_1 წერტილზე $|A_k, A_l|$ სიგრძის რადიუსის მქონე წრეწირისა და O_2 წერტილზე $|A_i, A_j|$ სიგრძის რადიუსის მქონე წრეწირის გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 19 მარჯვნივ).

შენიშვნა: $A_i, A_j, A_k, A_l, O_1, O_2 \in \mathcal{S}$ წერტილთა შორის რამოდენიმე შეიძლება ერთმანეთს ემთხვეოდეს.



ნახ. 19: ფარგლითა და სახაზავით ახალი წერტილების აგების შესაძლებლობები

რაიმე გეომეტრიული ფიგურა ითვლება აგებულად, თუ ფარგლითა და სახაზავით ზემოთ აღწერილი წესების დაცვით აიგება ისეთი სიმრავლე $\mathcal{S}$, რომ მასში მოიძებნოს ისეთი წერტილები, რომელთა ტეხილებით შეერთება ამ საძიებელ ფიგურას მოგვცემს.

რაიმე რიცხვი ξ ითვლება აგებულად, თუ ფარგლითა და სახაზავით ზემოთ აღწერილი წესების დაცვით აიგება ისეთი სიმრავლე $\mathcal{S}$, რომ მასში მოიძებნოს ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილია ξ.

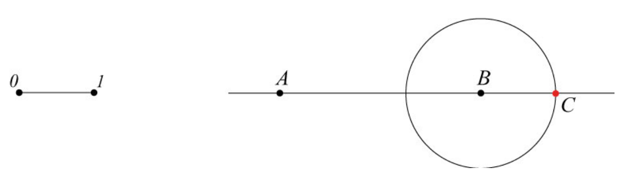
შედეგი: მოცემული გეომეტრიული ფიგურისთვისა ან რიცხვისთვის დაადგინეთ, შეიძლება თუ არა მათი ფარგლითა და სახაზავით აგება.

დასაწყისისათვის მოცემულია ორი წერტილი A და B, რომელთა შორის მანძილი ერთის ტოლადაა მიჩნეული: $|A, B| = 1$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, აგებულია რიცხვი 1. იმისათვის, რომ ავაგოთ რიცხვი 2 (ანუ ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით ავაგოთ ისეთი წერტილები, რომელთა შორის მანძილი ორის ტოლია), შემდეგი ალგორითმი უნდა გამოვიყენოთ:

მოცემულია: ორი წერტილი A და B.

1. A და B წერტილებზე გაავლე წრფე;
2. ფარგლით შემოხაზე წრეწირი ცენტრით B წერტილში და რადიუსით 1;

   ეს წრეწირი AB წრფეს გადაკვეთს ორ წერტილში: D (წერტილიდან მარცხნივ) და ახალ C წერტილში, B წერტილიდან მარჯვნივ.
3. პასუხად გამოიტანე ორი წერტილი: A და C.



ნახ. 20: $|A, B| + 1$ სიგრძის მონაკვეთის აგება

ეს ალგორითმი აღვნიშნოთ როგორც N. თუ მისი მონაცემებია A და B წერტილები, $N(A,B) = (A,C)$. ადვილი საჩვენებელია, რომ $|A,C| = |A,B| + 1$.

ესე იგი, თუ მოცემულია ორი წერტილი A და B, რომელთა შორის მანძილია 1, შეიძლება $n \in \mathbb{N}$ რიცხვის აგება შემდეგი რეკურსიული ალგორითმით:

- $P_1 = (A,B)$;
- $P_n = N(P_{n-1})$.

სავარჯიშო 1.28: გამოითვალეთ $T(P_n)$. ჩათვალეთ, რომ ორ წერტილზე წრფის გავლების, მოცემულ ორ წერტილს შორის მანძილის ფარგლით მონიშვნისა და მოცემულ წერტილზე რაიმე რადიუსით წრეწირის გავლების ბიჯების რაოდენობა ერთის ტოლია.

სავარჯიშო 1.29: მოცემულია ოთხი წერტილი A, B, C, D. რა ალგორითმით შეიძლება $|A,B| + |C,D|$ სიგრძის მონაკვეთის აგება? გამოითვალეთ ამ ალგორითმის ბიჯების რაოდენობა და დაამტკიცეთ მისი სისწორე.

სავარჯიშო 1.30: მოცემულია ორი ცერტილი A, B, სადაც $|A,B| > 1$. შეადგინეთ ალგორითმი, რომელიც $|A,B| - 1$ სიგრძის მონაკვეთს ააგებს. გამოითვალეთ ამ ალგორითმის ბიჯების რაოდენობა და დაამტკიცეთ მისი სისწორე.

თუ მოცემულია ორი წერტილი A და B, ადვილად შეიძლება $[A,B]$ მონაკვეთის შუა პერპენდიკულარული წრფის აგება, ანუ ისეთი ორი წერტილის აგება, რომლებზე გამავალი წრფეც ამ მონაკვეთის პერპენდიკულარულია და მის შუა წერტილზე გადის (ცხადია, რომ იგივე ალგორითმით შეიძლება ამავე მონაკვეთის შუა წერტილის დადგენა):

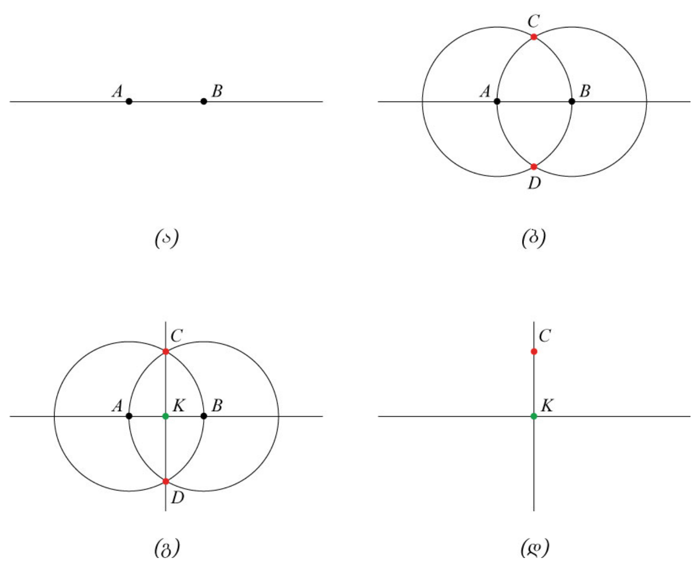
მოცემულია: ორი წერტილი A და B (ნახ. 21 *(ა)*).

- A წერტილზე შემოავლე $|A,B|$ რადიუსის წრეწირი;
- B წერტილზე შემოავლე $|A,B|$ რადიუსის წრეწირი (ნახ. 21 *(ბ)*)

  შედეგი: ამ ორი წრეწირის გადაკვეთის წერტილები C და D.
- შეაერთე C და D წერტილები წრფით (ნახ. 21 *(გ)*).

  შედეგი: ამ წრფისა და A, B მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილი K.
- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი C და K (ნახ. 21 *(დ)*).

ცხადია, რომ C და K წერტილებზე გავლებული წრფე $[A,B]$ მონაკვეთის შუა პერპენდიკულარულია.



ნახ. 21: $[A,B]$ მონაკვეთის შუა პერპენდიკულარულის აგება

ეს ალგორითმი აღვნიშნოთ როგორც $P(A,B)$. ამრიგად, $P(A,B) = (C,K)$, სადაც K $[A,B]$ მონაკვეთის შუა წერტილია.

თუ მოცემულია ორი წერტილი A და B და ერთი წერტილი C, რომელის არ ემთხვევა A წერტილს, მაშინ შეიძლება C წერტილიდან (A,B) წრფეზე პერპენდიკულარული წრფის დაშვება, ანუ ისეთი D წერტილის აგება (A,B) წრფეზე, რომ (C,D) წრფე (A,B) წრფის პერპენდიკულარული იყოს:

მოცემულია: ორი წერტილი A და B და ერთი წერტილი C, რომელიც არ დევს (A,B) წრფეზე (ნახ. 22 *(ა)*).

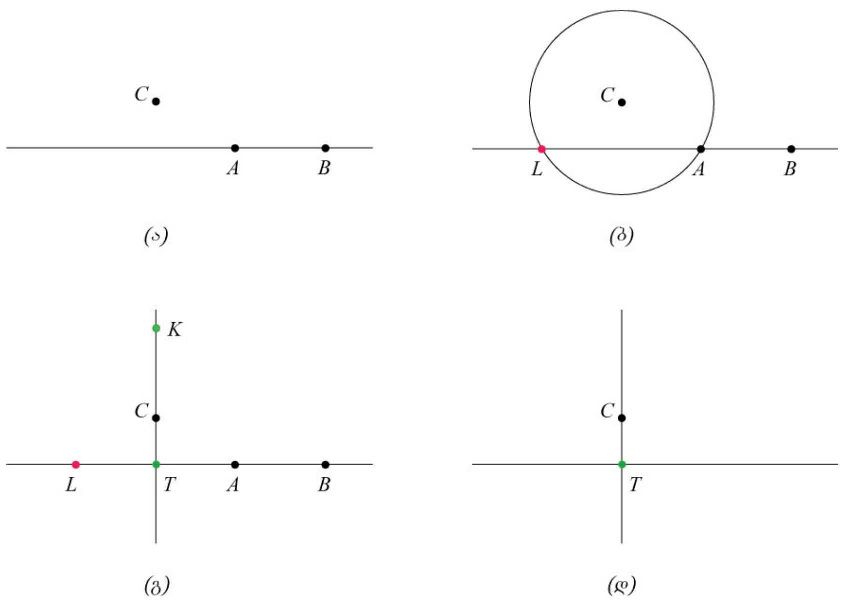
- C წერტილზე შემოავლე $|A,C|$ რადიუსის წრეწირი (ნახ. 22 *(ბ)*);

  შედეგი: ამ წრეწირისა და (A,B) წრფის გადაკვეთის მეორე წერტილი L.

- ჩაატარე ალგორითმი $P(A,L)$.

  შედეგი: ორი წერტილი K და T, რომელთაგან T დევს (A,B) წრფეზე (ნახ. 22 *(გ)*).

- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი C და T (ნახ. 22 *(დ)*).



ნახ. 22: წერტილიდან წრფეზე პერპენდიკულარულის დაშვების პროცესი

სავარჯიშო 1.31: ზემოთ მოყვანილ ალგორითმში A და L წერტილებზე უნდა ჩავატაროთ $P(A,L)$ ალგორითმი. დაწვრილებით აღწერეთ ნახაზებით ეს პროცესი, რომლის შედეგადაც მიიღება K და T წერტილები.

სავარჯიშო 1.32: რა მოხდება, თუ C წერტილში $|A,C|$ რადიუსით გავლებული წრეწირი (A,B) წრფეს მხოლოდ ერთ წერტილში გადაკვეთს და მეორე L წერტილი არ მიიღება?

სავარჯიშო 1.33: ზემოთ მოყვანილ ალგორითმში, $P(A,L)$ ალგორითმის შესრულების შემდეგ, რატომ მიიღება ორი დამატებითი წერტილი K და T?

სავარჯიშო 1.34: დაამტკიცეთ, რომ (C,T) წრფე (A,B) წრფის პერპენდიკულარულია.

სავარჯიშო 1.35: მოცემულია ერთ წრფეზე მყოფი სამი წერტილი A, B და მათ შორის მდებარე C. რა ალგორითმით შეიძლება C წერტილიდან (A,B) წრფის პერპენდიკულარული წრფის აგება?

სავარჯიშო 1.36: მოცემულია ორი წერტილი A და B და ერთი წერტილი C, რომელიც არ დევს (A, B) წრფეზე. რა ალგორითმით შეიძლება C წერტილიდან (A, B) წრფის პარალელური წრფის აგება (ანუ ისეთი D წერტილის აგება, რომ (C, D) წრფე (A, B) წრფის პარალელური იყოს)?

თუ აგებულია ორი რიცხვი $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, ანუ A_1, A_2, A_3, A_4 ისეთი, რომ $|A_1, A_2| = a_1$ და $|A_3, A_4| = a_2$, მაშინ შეიძლება ისეთი ორი B_1, B_2 წერტილის აგება ფარგლითა და სახაზავით, რომ $|B_1, B_2| = a_1 \cdot a_2$:

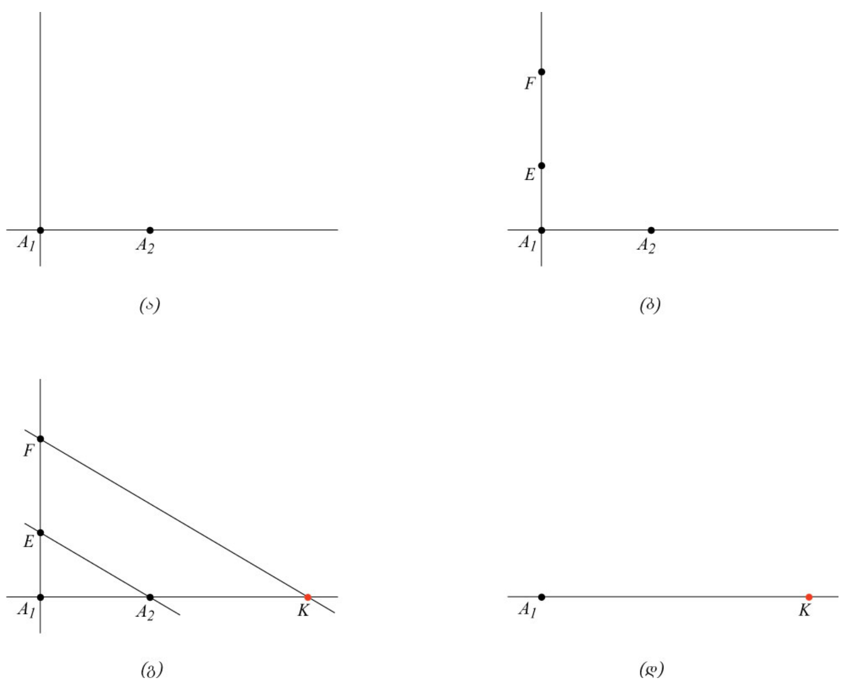
მოცემულია: ოთხი წერტილი A_1, A_2, A_3, A_4, სადაც $|A_1, A_2| = a_1$ და $|A_3, A_4| = a_2$.

- A_1 წერტილზე გაავლე (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარული წრფე (ნახ. 23 *(ა)*) ;
- ამ წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე ერთის ტოლი მონაკვეთი;

  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი E, სადაც $|A_1, E| = 1$ (ნახ. 23 *(ბ)*).
- იგივე წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე $|A_3, A_4|$ სიგრძის მონაკვეთი;

  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი F, სადაც $|A_1, F| = |A_3, A_4|$ (ნახ. 23 *(ბ)*).
- E და A_2 წერტილებზე გაავლე წრფე;
- F წერტილიდან გაავლე $|E, A_2|$ წრფის პარალელური წრფე;

  შედეგი: ამ წრფისა და (A_1, A_2) წრფის გადაკვეთის წერტილი K (ნახ. 23 *(გ)*).
- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი A_1 და K (ნახ. 23 *(დ)*).



ნახ. 23: $|A_1, A_2| \cdot |A_1, F|$ სიგრძის მონაკვეთის აგების პროცესი

სავარჯიშო 1.37: სამკუთხედების მსგავსებით დაამტკიცეთ, რომ $|A_1, K| = a_1 \cdot a_2$.

სავარჯიშო 1.38: დაამტკიცეთ, რომ თუ $a_2 < 1$, ალგორითმი მაინც სწორად მუშაობს.

ანალოგიურად შეიძლება $\frac{a_1}{a_2}$ სიგრძის მონაკვეთის აგება, თუ მოცემულია ოთხი წერტილი A_1, A_2, A_3, A_4, სადაც $|A_1, A_2| = a_1$ და $|A_3, A_4| = a_2$.

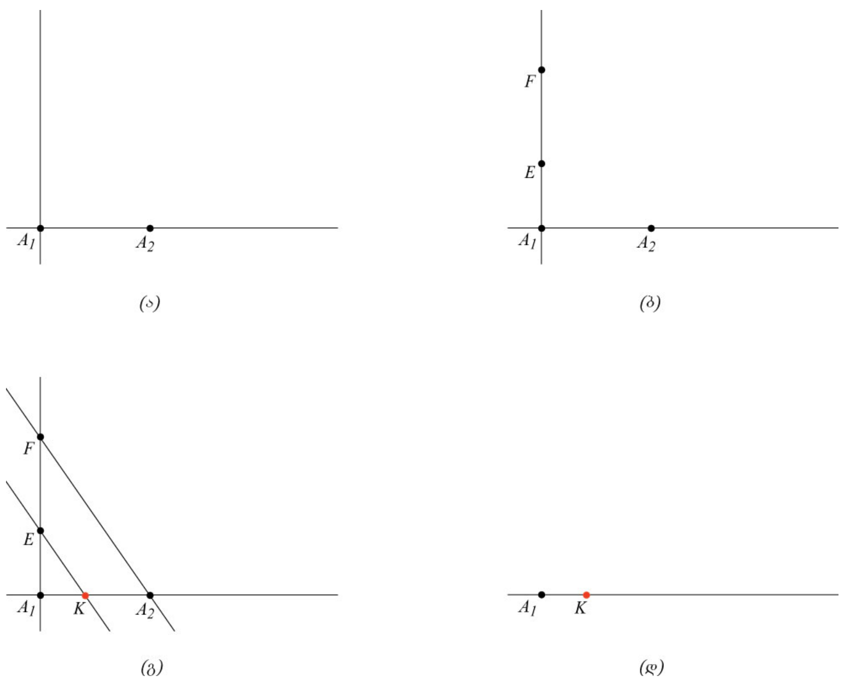
მოცემულია: ოთხი წერტილი A_1, A_2, A_3, A_4, სადაც $|A_1, A_2| = a_1$ და $|A_3, A_4| = a_2$.

- A_1 წერტილზე გაავლე (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარული წრფე (ნახ. 24 *(ა)*);
- ამ წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე ერთის ტოლი მონაკვეთი;

  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი E, სადაც $|A_1, E| = 1$ (ნახ. 24 *(ბ)*) .
- იგივე წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე $|A_3, A_4|$ სიგრძის მონაკვეთი;

  შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი F, სადაც $|A_1, F| = |A_3, A_4|$ (ნახ. 24 *(ბ)*).
- F და A_2 წერტილებზე გაავლე წრფე;
- E წერტილიდან გაავლე $|F, A_2|$ წრფის პარალელური წრფე;

  შედეგი: ამ წრფისა და (A_1, A_2) წრფის გადაკვეთის წერტილი K (ნახ. 24 *(გ)*).
- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი A_1 და K (ნახ. 24 *(დ)*).



ნახ. 24: $\frac{|A_1,A_2|}{|A_1,F|}$ სიგრძის მონაკვეთის აგების პროცესი

სავარჯიშო 1.39: სამკუთხედების მსგავსებით დაამტკიცეთ, რომ $|A_1, K| = \frac{a_1}{a_2}$.

ამრიგად ჩვენ გვაქვს ნებისმიერი რაციონალური რიცხვის აგების მეთოდი, ანუ ფარგლითა და სახაზავით მთლიანად შეიძლება აიგოს ნებისმიერი რაციონალურ რიცხვი $a \in \mathbb{Q}$.

ბუნებრივია შემდეგი შეკითხვა: შეიძლება თუ არა ირაციონალური რიცხვების აგება ფარგლითა და სახაზავით? პირველი ასეთი რიცხვი არის $\sqrt{2}$, რომელიც პითაგორას თეორემაზე დაყრდნობით აიგება:

მოცემულია: ორი წერტილი A_1, A_2.

- A_1 წერტილზე გაავლე (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარული წრფე;
- ამ წრფეზე A_1 წერტილიდან გადაზომე ერთის ტოლი მონაკვეთი;

შედეგი: (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარულ წრფეზე მდებარე წერტილი E, სადაც $|A_1, E| = 1$.

- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი A_1 და E.

სავარჯიშო 1.40: დახაზეთ ზემოთ მოყვანილი ალგორითმის დიაგრამები ისე, როგორც ეს წინა ალგორითმებისთვის იყო ნაჩვენები.

სავარჯიშო 1.41: დაამტკიცეთ, რომ $|A_1, E| = \sqrt{2}$, თუ $|A_1, A_2| = 1$.

ამ ალგორითმს ვუწოდოთ S. ესე იგი, თუ მოცემულია ორი წერტილი A, B ისე, რომ $|A, B| = a$, $S(A, B) = (A, C)$, სადაც $|A, C| = \sqrt{a+1}$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ შემდეგი რეკურსიული ალგორითმი $H(n)$ ორ წერტილს გვაძლევს, რომელთა შორის მანძილია $\sqrt{n}$:

ალგორითმი $H(n)$:

- თუ $n = 1$, გამოიტანე ორი წერტილი A, B, სადაც $|A, B| = 1$ და ალგორითმი დაამთავრე;
- თუ $n > 1$:

  გაუშვი ალგორითმი $H(n-1)$;

სავარჯიშო 1.42: მათემატიკური ინდუქციით დაამტკიცეთ $H(n)$ ალგორითმის სისწორე.

სავარჯიშო 1.43: რისი ტოლია $T(H(n))$?

სავარჯიშო 1.44: ზემოთ მოყვანილი ალგორითმების საფუძველზე შეადგინეთ ალგორითმი, რომელიც ფესვს ნებისმიერი რაციონალური რიცხვიდან გამოიანგარიშებს.

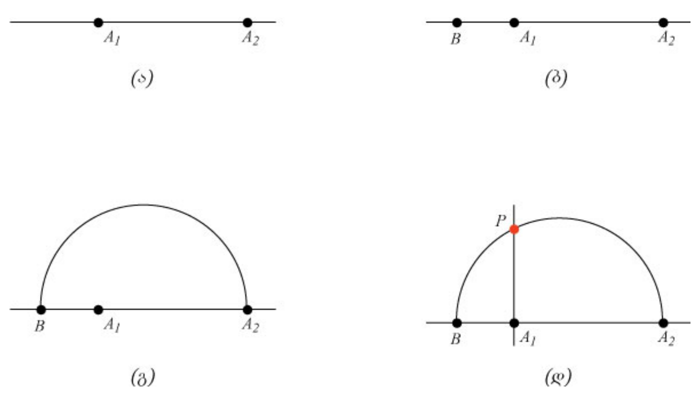
ახლა კი განვიხილოთ შემდეგი ალგორითმი:

მოცემულია: ორი წერტილი A_1, A_2, სადაც $|A_1, A_2| = \xi$ (ნახ. 25 *(ა)*).

- A_1 წერტილის მარცხნივ (A_1, A_2) წრფეზე გადაზომე ერთის ტოლი მონაკვეთი და მიღებული წერტილი იყოს B ($|B, A_1| = 1$) (ნახ. 25 *(ბ)*);
- შემოავლე წრეწირი დიამეტრით $[B, A_2]$ (ნახ. 25 *(გ)*);
- A_1 წერტილიდან აღმართე (A_1, A_2) წრფის პერპენდიკულარული წრფე (ნახ. 25 *(დ)*);

  შედეგი: ამ წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილი P (ნახ. 25 *(დ)*).

- გამოიტანე პასუხი: ორი წერტილი A_1 და P.



ნახ. 25: $\sqrt{|A_1, A_2|}$ სიგრძის მონაკვეთის აგების პროცესი

სავარჯიშო 1.45: სამკუთხედების მსგავსებით დაამტკიცეთ, რომ $|A_1, P| = \sqrt{|A_1, A_2|} = \sqrt{\xi}$.

სავარჯიშო 1.46: მოცემულია ორი წერტილი A და B. რა ალგორითმით შეიძლება წრეწირის შემოვლება, რომლის დიამეტრია $[A, B]$?

სავარჯიშო 1.47: მოცემულია სამი წერტილი O, A და B. O წერტილიდან გამოდის ორი სხივი $[O, A[$ და $[O, B[$, რომელიც O წერტილში ქმნის კუთხეს α. დაწერეთ ალგორითმი, რომელიც O, A და B მონაცემზე პასუხად მოგვცემს სამ წერტილს O, A და C ისე, რომ $\angle AOC = \frac{\alpha}{2}$.

ანტიკური ამოცანები:

- წრის კვადრატურა: მოცემულია O წერტილი და მის გარშემო შემოვლებული წრეწირი რადიუსით 1. ამ წრის ფართობია π. შეიძლება თუ არა იგივე ფართობის კვადრატის აგება მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით?
- მესამე ხარისხის ფესვი: მოცემულია ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილია a. შეიძლება თუ არა მხოლოდ ფარგლითა და სახაზავით ისეთი ორი წერტილის აგება, რომელთა შორის მანძილია $\sqrt[3]{a}$?
- სამმაგი ბისექტრისა: მოცემულია სამი წერტილი O, A და B. O წერტილიდან გამოდის ორი სხივი $[O, A[$ და $[O, B[$, რომელიც O წერტილში ქმნის კუთხეს α. შეიძლება თუ არა მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით ავაგოთ ისეთი წერტილი C, რომ $\angle AOC = \frac{\alpha}{3}$?
- წესიერი მრავალკუთხედები: რამდენკუთხა წესიერი მრავალკუთხედის აგება შეიძლება მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით? (ამოზნექილ მრავალკუთხედს ეწოდება წესიერი, თუ მისი ყველა გვერდი ერთმანეთის ტოლია.)

როგორც აღმოჩნდა, პირველი სამი ამოცანა ამოუხსნადია: არ არსებობს ისეთი ალგორითმი, რომელიც მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით ააგებს ორ წერტილს, რომელთა შორის მანძილია π; ან ისეთი ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი a რიცხვიდან მესამე ხარისხის ფესვს ამოიღებს ან ისეთი ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერ კუთხეს სამად გაყოფს (ისე, როგორც ის ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი რიცხვიდან კვადრატულ ფესვს ამოიღებს ან ნებისმიერ კუთხეს ორად გაჰყოფს).

ამის დამტკიცების იდეა შემდეგია:

ახალი წერტილის აგება შეიძლება მხოლოდ როგორც უკვე აგებულ წერტილებზე გავლებული ორი წრფის, ორი წრეწირისა ან ერთი წრეწირისა და ერთი წრფის გადაკვეთის წერტილისა. თუ ავაგებთ ორი გეომეტრიული ფიგურის გადაკვეთის წერტილს, მაშინ მისი დაშორება კოორდინატთა სათავიდან გამოითვლება შემდეგი პოლინომიური განტოლების ამონახსნით: $a_x^{2^n} + a_{2^n-1}x^{2^n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, სადაც n რაღაცა ნატურალური რიცხვია.
რადგან $\sqrt[3]{a}$ არ არის ასეთი სახის პოლინომის (ანუ ორის ხარისხის რიგის პოლინომის) ამონახსნი, ამიტომ ამ რიცხვის ფარგლითა და სახაზავით აგება შეუძლებელია.
როგორც XIX საუკუნეში გერმანელმა მათემატიკოსმა ლინდემანმა დაამტკიცა, π ტრანსცენდენტული რიცხვია, ანუ იგი არ არის არანაირი პოლინომიური განტოლების ამონახსნი და მით უმეტეს ვერ იქნება ორის ხარისხის რიგის განტოლების ამონახსნი, რითაც მტკიცდება, რომ ფარგლითა და სახაზავით π რიცხვის აგება შეუძლებელია.

მაგრამ არსებობს ფორმულა, რომელიც გვეუბნება, თუ რამდენ კუთხა წესიერი მრავალკუთხედის აგება შეიძლება მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით: n კუთხა წესიერი მრავალკუთხედის აგება შეიძლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\exists m, q_1, ..., q_l \in \mathbb{N}_0$ ისე, რომ $n = 2^m \cdot (2^{2^{q_1}} + 1) \cdot (2^{2^{q_2}} + 1) \cdots (2^{2^{q_l}} + 1)$.
ამ ფორმულიდან გამომდინარე შეიძლება წესიერი ხუთკუთხედის, ცხრამეტკუთხედისა და 65537 კუთხედის აგება, მაგრამ არ შეიძლება წესიერი 7-კუთხედის აგება.

სავარჯიშო 1.48: შეადგინეთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეიძლება წესიერი ექვსკუთხედის აგება.

სავარჯიშო 1.49: შეადგინეთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეიძლება წესიერი რვაკუთხედის აგება.

სავარჯიშო 1.50: შეადგინეთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეიძლება წესიერი ხუთკუთხედის აგება.

შენიშვნა: ზემოთ მოყვანილი ამოცანებისათვის არ არსებობს ალგორითმი, რომელიც მხოლოდ ფარგლითა და სახაზავით აგვაგებინებდა საჭირო წერტილებსა და ფიგურებს. ეს კი იმას არ ნიშნავს, რომ არ არსებობს სხვა რაიმე მეთოდი (თუ არ შევიზღუდებით მხოლოდ ფარგლითა და სახაზავით), რითაც ამ ამოცანებს გადავჭრით.

ღია ამოცანა: წესიერი მრავალკუთხედის ზემოთ მოყვანილ ფორმულაში $2^{2^q}+1$ ე.წ. ფერმას მარტივი რიცხვია. დიდ ხანს ეგონათ, რომ ეს ფორმულა მხოლოდ მარტივ რიცხვებს იძლეოდა, მაგრამ აღმოჩნდა, რომ ეს ასე არაა. უფრო მეტიც: ეს ფორმულა ძირითადად შედგენილ რიცხვებს იძლევა. მაგრამ მნიშვნელოვანია შემდეგი საკითხი: სასრულია თუ არა ფერმას მარტივ რიცხვთა სიმრავლე? ან, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეგვხვდება თუ არა მიმდევრობაში $(2^{2^q}+1)_{q=0}^{\infty}$ უსასრულოდ ბევრი მარტივი რიცხვი? ამ შეკითხვაზე პასუხი ჯერ-ჯერობით უცნობია.